1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.972.6+514.86

ЛЕОНОВ К.Я.

ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ КАК ДВУМЕРНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Более двухсот лет существует теория течений идеальных сжимаемых жидкостей и газов. Однако, математическая форма этой теории еще далека от совершенства. Ниже перечислены некоторые недостатки математического оформления теории, от которых атору статьи удалось избавиться, используя аппарат дифференциальных форм и новую вариационную формулировку теории.

1) Отсутствовала удовлетворительная вариационная инвариантная формулировка теории.

В, известных автору, вариационных формулировках теории идеальной жидкости изложение, с самого начала, ведется с использованием либо координат Лагранжа, либо координат Эйлера (см., напр., [1]). Но уже в самом этом изначальном разделении способов описания заложена определенная неинвариантность так как полная инвариантность должна допускать не только гладкие преобразования выбранных независимых координат, но и допускать способы описания с помощью различных (не связанных друг с другом обычными гладкими преобразованиями) независимых переменных. Например, должен допускаться сводный выбор между координатами Лагранжа, координатами Эйлера, координатами плоскости годографа и т.д. Кроме этого, практикуемое постулирование инвариантности Лагранжа и введение, в связи с этим, в подинтегральное выражение вариационного функционала детерминанта метрического тензора, по мнению автора не совсем естественно, т.к. при переходе к координатам лагранжа в подинтегральном выражении этого функционала, получаем громоздкое выражение, которое не поддается естественной интерпретации даже для такой простой модели, как модель линейно-упругого стержня.

2) Не было удовлетворительного математического описания механики *неоднородных* газов и жидкостей.

Основной причиной этого было отсутствие формализма способного одновременно учитывать как лагранжевую, так и эйлеровую точки зрения, а необходимость этого, при описании неоднородных газов и жидкостей, очевидна. Например, в систему уравнений в эйлеровых координатах обязательно войдут лагранжевые координаты так как известные функции входящие в уравнения и описывающие материальные свойства неоднородной среды являются функциями лагранжевых координат. По этой же причине даже в газостатике не удавалось получить формулу для давления в столбе неоднородного газа находящегося в поле силы тяжести.

3) Существующая форма описания течений газов и жидкостей затрудняет понимание природы системы уравнений Эйлера, составляющей фундамент теории.

На это обстоятельство указывает следующий, имеющий значение не только для теории, вопрос: почему *одна и таже* искомая функция, называемая давлением, входит в уравнения импульсов (количества движения) и в системе уравнений Эйлера и в системе уравнений в лагранжевых координатах, хотя приборы измеряющие давление согласно эйлеровой точки зрения (стоящие на берегу потока) и приборы измеряющие давление согласно лагранжевой точки зрения (свободно плывущие вместе с потоком) показывают различные распределения давления в потоке?

4) При существующей форме описания течений газов и жидкостей, нет простых и эффективных способов перехода от одного вида зависимых и независимых переменных к другим (как связанных, так и не связанных между собой обычными гладкими преобразованиями).

С целью совершенствования математической формы теории, автор предлагает рассматривать одномерные течения идеальных жидкостей и газов как двумерные экстремальные многообразия (определение см. ниже) вложенные в трехмерное многообразие, которое назовем конфигурационным пространством. Координаты конфигурационного пространства обозначим через $\left(x^1, x^2, x^3\right)$. Двумерные многообразия в конфигурационном пространстве можно аналитически представлять либо ввиде уравнения между координатами пространства, например, $x^3 = x^3\left(x^1, x^2\right)$, либо в параметрической форме $x^i = x^i(\alpha, \beta), (i = 1,2,3)$, где α и β какие-нибудь параметры на самом многообразии, которое часто называют гауссовыми координатами многообразия. Инфинитезимальным элементом двумерного многообразия в выбранной точке, является плоское касательное двумерное многообразие, проходящее через эту точку. Множество всех плоских двумерных многообразий в конфигурационном пространстве описывается с помощью бивекторного расслоения этого пространства. Пространство сопряженное пространству бивекторов есть пространство 2-форм, которое назовем фазовым пространством двумерных многообразий. Координаты в этом трехмерном фазовом пространстве обозначим через $\left(P_{12}, P_{13}, P_{23}\right)$. Два-формное расслоение конфигурационного пространства, имеющее координаты $\left(x^1, x^2, x^3, P_{12}, P_{13}, P_{23}\right)$ назовем пространством состояний двумерных многообразий.

Математическую модель определенного класса двумерных многообразий зададим поверхностью в фазовом пространстве

$$D\left(P_{12}, P_{13}, P_{23}; x^1, x^2, x^3\right) = 0 \qquad (1)$$

где координаты $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ следует рассматривать как параметры этой поверхности. Поверхность (1) назовем детерминантной поверхностью модели.

Рассмотрим инвариантный функционал

$$A = \int_S \sum_{i<j} P_{ij}\left(x^1, x^2, x^3\right) dx^i \wedge dx^j = \int_{S(\alpha,\beta)} \sum_{i<j} P_{ij}\left(x^1, x^2, x^3\right)\left(x^i_\alpha x^j_\beta - x^i_\beta x^j_\alpha\right) d\alpha \wedge d\beta \quad (2)$$

Определение. *Двумерное многообразие назовем экстремальным относительно поверхности (1), если его изображение в пространстве состояний* $\left(x^1(\alpha,\beta), x^2(\alpha,\beta), x^3(\alpha,\beta), P_{12}(\alpha,\beta), P_{13}(\alpha,\beta), P_{23}(\alpha,\beta)\right)$ *является решением системы вариационных уравнений, полученных при варьировании функционала (2) с учетом связи (1).*

Варьирование функционала (2) можно производить различными способами. Универсальным способом является способ при котором варьируются все координаты пространства состояний, а связь (1) учитывается с помощью вспомогательной 2-формы с неопределенными коэффициентами, которая является естественным обобщением неопределенных множителей Лагранжа. Однако, для интересующих нас приложений можно воспользоваться более простым способом, а именно, выразить в уравнении (1) одну из координат фазового пространства через другие и подставить в функционал (2), а затем произвести безусловное варьирование по остальным координатам пространства состояний. Например, если уравнение (1) может быть разрешено как относительно P_{12}, так и относительно P_{13}.

$$P_{12} = P_{12}\left(P_{13}, P_{23}; x^1, x^2, x^3\right) \tag{3}$$

$$P_{13} = P_{13}\left(P_{12}, P_{23}; x^1, x^2, x^3\right) \tag{4}$$

то, при использовании равенства (3), получается система пяти вариационных уравнений

$$\begin{cases} dP_{12}\wedge dx^2 + dP_{13}\wedge dx^3 = \dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^1}dx^1\wedge dx^2 \\ -dP_{12}\wedge dx^1 + dP_{23}\wedge dx^3 = \dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^2}dx^1\wedge dx^2 \\ -dP_{13}\wedge dx^1 - dP_{23}\wedge dx^2 = \dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^3}dx^1\wedge dx^2 \\ dx^1\wedge dx^3 + \dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{13}}dx^1\wedge dx^2 = 0 \\ dx^2\wedge dx^3 + \dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{23}}dx^1\wedge dx^2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

для пяти функций $x^i(\alpha,\beta), (i=1,2,3), P_{13}(\alpha,\beta), P_{23}(\alpha,\beta)$, а при использовании равенства (4) получим систему пяти уравнений

$$\begin{cases} dP_{12}\wedge dx^2 + dP_{13}\wedge dx^3 = \dfrac{\partial P_{13}}{\partial x^1}dx^1\wedge dx^3 \\ -dP_{12}\wedge dx^1 + dP_{23}\wedge dx^3 = \dfrac{\partial P_{13}}{\partial x^2}dx^1\wedge dx^3 \\ -dP_{13}\wedge dx^1 - dP_{23}\wedge dx^2 = \dfrac{\partial P_{13}}{\partial x^3}dx^1\wedge dx^3 \\ dx^1\wedge dx^2 + \dfrac{\partial P_{13}}{\partial P_{12}}dx^1\wedge dx^3 = 0 \\ dx^2\wedge dx^3 + \dfrac{\partial P_{13}}{\partial P_{23}}dx^1\wedge dx^3 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

для пяти функций $x^i(\alpha,\beta), (i=1,2,3), P_{12}(\alpha,\beta), P_{23}(\alpha,\beta)$. Системы уравнений (5), (6) являются системами вариационных уравнений в параметрической форме или в дифференциалах координат пространства состояний. Отметим, что при любой детерминантной поверхности модели системы уравнений (5), (6) являются линейными относительно координат бивекторов описывающих инфинитезимальные элементы изображения двумерного многообразия в пространстве состояний.

Если за независимые параметры (α,β) брать, при соответствующих предположениях, пары составленые из координат пространства состояний, то получаются различные системы уравнений в производных по этим координатам. Например, для множества многообразий, на которых, в выбранной системе координат, выполняется условие $x_\alpha^1 x_\beta^2 - x_\beta^1 x_\alpha^2 \neq 0$, можно за параметры (α,β) взять координаты (x^1,x^2). В этом случае из системы уравнений (5) получим систему уравнений в производных по координатам (x^1,x^2)

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{12}}{dx^1}+\dfrac{dP_{13}}{dx^1}\dfrac{dx^3}{dx^2}-\dfrac{dP_{13}}{dx^2}\dfrac{dx^3}{dx^1}=\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^1} \\ \dfrac{dP_{12}}{dx^2}+\dfrac{dP_{23}}{dx^1}\dfrac{dx^3}{dx^2}-\dfrac{dP_{23}}{dx^2}\dfrac{dx^3}{dx^1}=\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^2} \\ \dfrac{dP_{13}}{dx^2}-\dfrac{dP_{23}}{dx^1}=\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^3} \\ \dfrac{dx^3}{dx^1}-\dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{23}}=0 \\ \dfrac{dx^3}{dx^2}+\dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{13}}=0 \end{cases} \tag{7}$$

где запись, например, $\dfrac{dP_{23}}{dx^1}$ означает взятие *полной* производной от функции $P_{23}\left(x^1,x^2,x^3\left(x^1,x^2\right)\right)$ по x^1. Легко показать, что в системе уравнений (7) первые два уравнения являются следствиями остальных трех уравнений.

Если в некоторой группе проблем основной интерес представляют величины P_{13}, P_{23}, а $\partial P_{12}/\partial x^3$ не зависит явно от x^3, то удобно рассматривать не систему состоящую из последних трех уравнений системы (7), а систему

$$\begin{cases} \dfrac{dP_{13}}{dx^2}-\dfrac{dP_{23}}{dx^1}=\dfrac{\partial P_{12}}{\partial x^3} \\ \dfrac{d}{dx^1}\left(\dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{13}}\right)+\dfrac{d}{dx^2}\left(\dfrac{\partial P_{12}}{\partial P_{23}}\right)=0 \end{cases} \tag{8}$$

которая получается из указанной выше системы уравнений путем перекрестного дифференцирования последних двух уравнений и исключения смешанной производной.

Приведем примеры математических моделей и укажем соответствующую интерпретацию координат конфигурационного и фазового пространств.

1) Модель адиабатических течений политропных газов: функционал A есть плотность действия, ее размерность дж·сек/м^2; координаты конфигурационного пространства (t,ξ,x), где t - время, ξ - лагранжевая координата элемента газа, x - координата пространства наблюдателя (эйлеровая координата); $P_{12}=h$, где h есть плотность полной энтальпии (содержащая плотность кинетической энергии макроскопического движения элемента газа) [2, т.2]; $P_{13}=(-P)$, где P - давление $(P>0)$; $P_{23}=q$ - плотность импульса; уравнение детерминантной поверхности

$$h = \frac{1}{2\rho_0(\xi)}q^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}B(s)P_0\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + h_0 \qquad (9)$$

где γ - коэффициент Пуассона $(\gamma>1)$, $B(s)=\exp\left((s-s_0)/c_p\right)$, где s - энтропия, а c_p - теплоемкость газа при постоянном давлении, $\rho_0(\xi)$ - плотность газа в выбранных лагранжевых координатах. Если течения газа происходят параллельно направлению поля силы тяжести, то в правую часть уравнения (9) следует добавить член $\rho_0 gx$, где g - ускорение силы тяжести.

2) Модель изотермических течений идеальных (совершенных) газов: Физическая итерпретация всех величин, за исключением P_{12}, таже, что в первой модели; $P_{12}=f$, где f - плотность термодинамического потенциала Гиббса ($[f]=$ дж/м^3); уравнение детерминантной поверхности

$$f = \frac{1}{2\rho_0}q^2 + \frac{k\rho_0}{m}T\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) + f_0 \qquad (10)$$

где T - температура (в градусах), κ - постоянная Больцмана, m - масса молекулы газа.

3) Модель динамики упругого стержня (продольные адиабатические деформации): физический смысл функционала A и координат конфигурационного пространства тотже, что в первой модели; $P_{12}=h$ - плотность полной энтальпии; $P_{13}=\tau$ - напряжение; $P_{23}=q$ - плотность импульса; уравнение детерминантной поверхности

$$h = \frac{1}{2\rho_0}q^2 - \sigma_0\varphi\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right), \quad (\sigma_0\varphi''(\cdot)>0)$$

При $\sigma_0=E$, где E - модуль Юнга, и $\varphi(\eta)=\frac{1}{2}(1+\eta)^2$ получаем модель динамики линейно-упругого стержня.

4) Модель минимальных поверхностей: функционал A - площадь поверхности; (x^1,x^2,x^3) - координаты трехмерного пространства вмещающего двумерную поверхность; существуют системы координат в которых P_{ij} имеют смысл косинусов углов наклона касательной плоскости поверхности к координатной плоскости (x^i,x^j); уравнение детерминантной поверхности, в указанных выше системах координат, таково

$$P_{12}^2 + P_{13}^2 + P_{23}^2 = 1.$$

Замечание. Минимальные поверхности при классической формулировке теории описываются не системой уравнений (7) или (8), а уравнением в частных проиводных второго порядка для функции $x^3=x^3(x^1,x^2)$. Этот вид описания является частным случаем способов описания двумерных экстремальных многообразий с помощью различных пар сопряженных между собой функций (потенциалов). Некоторые результаты исследования таких способов описания экстремальных многообразий опубликованы в [3].

Используя терминологию газовой динамики, можно сказать, что системы уравнений (7) и (8) это системы уравнений в лагранжевых координатах. Последние два уравнения системы (7) имеют две интерпретации. Их можно рассматривать как уравнения состояния газа (обычно так называют только последнее уравнение). Действительно, если в последнем уравнении воспользоваться функциями (9) или (10), то определяя плотность газа в текущий момент времени равенством $\rho dx = \rho_0 d\xi$, получим уравнения состояния политропного и идеального (совершенного) газа соответственно. Предпоследнее уравнение системы (7), для классических моделей определяемых детерминантными поверхностями (9) и (10), дает обычную простейшую связь плотности импульса со скоростью газа $q = \rho_0 \dfrac{dx}{dt} \equiv \rho_0 V$. Геометрический смысл последних двух уравнений системы (7) записанных, например, в терминах первой модели

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial q}; \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial h}{\partial P}$$

очевиден. Он состоит в том, что координаты нормалей к изображению экстремального многообразия в конфигурационном пространстве совпадают с координатами нормалей к детерминантной поверхности в точках определяемых соответствующими значениями давления и плотности импульса. В этом смысле, изображения экстремальных многообразий в конфигурационном пространстве строятся (для динамических моделей, во времени) по образу детерминантной поверхности.

Третье уравнение системы (7), для функций $\bar{q}(t,\xi) = q(t,\xi,x(t,\xi))$ и $\bar{P}(t,\xi) = P(t,\xi,x(t,\xi))$, есть обычное уравнение импульсов (количества движения) в лагранжевых координитах. Второе уравнение системы (8) можно записать в форме, которая чаще используется в газодинамике. Для этого следует воспользоваться уравнениями состояния газа и, введенными выше, функциями ρ и V, после чего это уравнение запишется так

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{d}{d\xi}(V) = 0.$$

Рассматривая систему уравнений (6) и принимая за независимые параметры (α,β) координаты $(x^1,x^3) \equiv (t,x)$ получим систему уравнений в эйлеровых координитах, где первое и третье уравнения являются следствиями остальных трех уравнений, которые в обозначениях первой модели запишутся так

$$\left\{\frac{dq}{dt} + \frac{dh}{dx} = -\frac{\partial P}{\partial \rho}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q}; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial P}{\partial h}\right. \tag{11}$$

Из системы уравнений (11) легко получить систему аналогичную системе уравнений (8)

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{dh}{dx} = -\dfrac{\partial P}{\partial \xi} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P}{\partial h}\right) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Первым уравнением системы (12), при $\partial P/\partial \xi \equiv 0$, пользовались в своих исследованиях Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. [4], однако, в целом эта система уравнений автору статьи не встречалась в литературе.

два уравнения системы (7) имеют две интерпретации. Их можно рассматривать как уравнения состояния газа (обычно так называют только последнее уравнение). Действительно, если в последнем уравнении воспользоваться функциями (9) или (10), то определяя плотность газа в текущий момент времени равенством $\rho dx = \rho_0 d\xi$, получим уравнения состояния политропного и идеального (совершенного) газа соответственно. Предпоследнее уравнение системы (7), для классических моделей определяемых детерминантными поверхностями (9) и (10), дает обычную простейшую связь плотности импульса со скоростью газа $q = \rho_0 \dfrac{dx}{dt} \equiv \rho_0 V$. Геометрический смысл последних двух уравнений системы (7) записанных, например, в терминах первой модели

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial q}; \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{\partial h}{\partial P}$$

очевиден. Он состоит в том, что координаты нормалей к изображению экстремального многообразия в конфигурационном пространстве совпадают с координатами нормалей к детерминантной поверхности в точках определяемых соответствующими значениями давления и плотности импульса. В этом смысле, изображения экстремальных многообразий в конфигурационном пространстве строятся (для динамических моделей, во времени) по образу детерминантной поверхности.

Третье уравнение системы (7), для функций $\bar{q}(t,\xi) = q(t,\xi,x(t,\xi))$ и $\bar{P}(t,\xi) = P(t,\xi,x(t,\xi))$, есть обычное уравнение импульсов (количества движения) в лагранжевых координитах. Второе уравнение системы (8) можно записать в форме, которая чаще используется в газодинамике. Для этого следует воспользоваться уравнениями состояния газа и, введенными выше, функциями ρ и V, после чего это уравнение запишется так

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) - \frac{d}{d\xi}(V) = 0.$$

Рассматривая систему уравнений (6) и принимая за независимые параметры (α,β) координаты $(x^1,x^3) \equiv (t,x)$ получим систему уравнений в эйлеровых координитах, где первое и третье уравнения являются следствиями остальных трех уравнений, которые в обозначениях первой модели запишутся так

$$\left\{\frac{dq}{dt} + \frac{dh}{dx} = -\frac{\partial P}{\partial \rho}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q}; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial P}{\partial h}\right. \tag{11}$$

Из системы уравнений (11) легко получить систему аналогичную системе уравнений (8)

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} + \dfrac{dh}{dx} = -\dfrac{\partial P}{\partial \xi} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial P}{\partial h}\right) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial P}{\partial q}\right) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Первым уравнением системы (12), при $\partial P / \partial \xi \equiv 0$, пользовались в своих исследованиях Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. [4], однако, в целом эта система уравнений автору статьи не встречалась в литературе.

Рассмотрим теперь вопрос о месте классической системы уравнений Эйлера одномерных течений идеальных жидкостей и газов в полученных выше системах уравнений. Это позволит ответить на вопрос поставленный в третьем пункте перечня недостатков математической формы теории. Оказывается, что система уравнений Эйлера является специфической формой системы уравнений (8) т.е. системы уравнений в лагранжевых координатах. Действительно, первое уравнение этой системы для функций $P_{23}\left(x^1,x^2,x^3\left(x^1,x^2\right)\right)\equiv q\left(t,\xi,x\left(t,\xi\right)\right)$ и $P_{13}\left(x^1,x^2,x^3\left(x^1,x^2\right)\right)\equiv -P\left(t,\xi,x\left(t,\xi\right)\right)$, после раскрытия полных производных и использования уравнений состояния газа, примет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t}+V\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \xi}+\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\partial h}{\partial x} \tag{13}$$

Второе уравнение, используя уравнение состояния газа $\rho_0/\rho=\partial h/\partial P$ и раскрывая полные производные, запишем так

$$\frac{\rho_0}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+V\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial q}{\partial \xi}+\frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\right)=\frac{1}{\rho_0^2}q\frac{\partial \rho_0}{\partial \xi}=0 \tag{14}$$

Если теперь предположить, что ρ_0 независит от ξ, а для функций $q=q\left(t,\xi,x\right)$, $P=P\left(t,\xi,x\right)$ выполняются условия $\partial q/\partial\xi=\partial P/\partial\xi=0$, то полагая $q=\rho_0 V$, из системы уравнений (13), (14) получим систему уравнений Эйлера

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial t}+V\dfrac{\partial V}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial h}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left(V\rho\right)=0\end{cases}$$

Итак, система уравнений Эйлера является системой уравнений в эйлеровых координатах как бы формально, причем из множества ее решений исключены решения зависящие явным образом от лагранжевой координаты, т.е. исключены решения описывающие течения (и статические состояния) неоднородных газов и жидкостей. Отсюда следует, что любые попытки построения теории неоднородных газов и жидкостей на базе системы уравнений Эйлера заранее обречены на неудачу.

Замечание. Модели, получающиеся из моделей 1)-2) заменой детерминантных поверхностей типа параболоидов на поверхности типа гиперболоидов, повидимому, не исследовались. Исследование таких моделей, по мнению автора, будет полезно для описания течений газов и жидкостей, имеющих большие скорости и высокие давления т.к. измерения показывают, что уравнения состояния таких течений значительно сложнее чем те, которые дают классические модели с детерминантными поверхностями (9) или (10).

Литература

[1]. Бердичевский В.Л. *Вариационные принципы механики сплошной среды.* М.: Наука, 1983.

[2]. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т. 1-2. М.: Наука, 1983-1984.

[3]. Леонов К.Я. *О потенциалах двумерных экстремальных многообразий.* // Труды ИММ АН Азерб., 1998, т.VIII(XVI), с.129-136.

[4]. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1988.