УДК 532.546

САВУРБАЕВ А.С.

ВЗАИМОПРОНИКАЮЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ РЕЛАКСИРУЮЩИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОЙ И КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Исследованиями ряда авторов [1,2] установлено, что при определенных числах Рейнольдса нарушаются раздельные течения жидкостей, происходит их смешивание и переход в дисперсное состояние.

Для описания их движения необходимо использование модели дисперсного движения двухкомпонентных систем.

С другой стороны известно, что смола и парафиносодержание нефти, газожидкостные смеси, растворы полимеров и др. имеют ярко выраженный дисперсный характер. В таких средах содержатся роевые образования, за счет сжимаемости и упругости которых происходит релаксация давления и скорости в несущей фазе при нагрузке. Поэтому изучение динамических процессов в таких средах должно проводиться на основе модели взаимопроникающих движений двухкомпонентных жидкостей [3], дополненные релаксационными уравнениями. По этой модели каждая среда считается сплошной, как бы движущейся по изменяющейся пористой среде, образованной другой фазой. Взаимодействие сред учитывается трением между средами, а также изменением сечения трубки тока [6]. При этом система уравнения, описывающая движение смеси, является замкнутой.

Изучению ламинарного движения многофазных смесей на основе указанной модели посвящены работы [4, 5, 6] и др.

Пусть взаимопроникающая двухкомпонентная жидкость двигается между двумя параллельными плоскостями расположенными друг от друга на расстоянии $2h$ (рис. 1а)) под действием давления.

В нашем случае будет

$$u_1 = u_1(y,t), \quad u_2 = u_2(y,t) \quad \text{и} \quad v = v_2 = 0, \quad w_1 = w_2 = 0.$$

Используя уравнение неразрывности первой и второй жидкости и пренебрегая массовыми силами получим:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = f_1\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + k(u_2 - u_1) - f_1 \frac{\partial p}{\partial x}, \\ &\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = f_2\mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + k(u_1 - u_2) - f_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad f_1 + f_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Учитывая релаксационные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\theta_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \tau_1 = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}, \\ &\theta_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial t} + \tau_2 = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

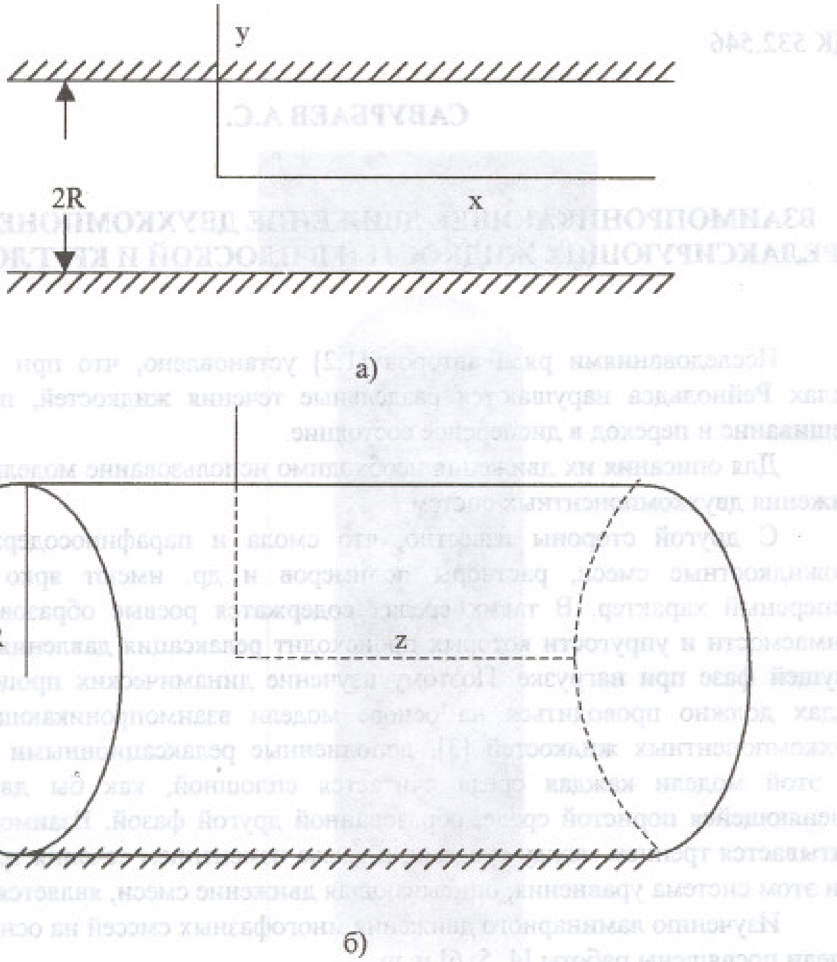


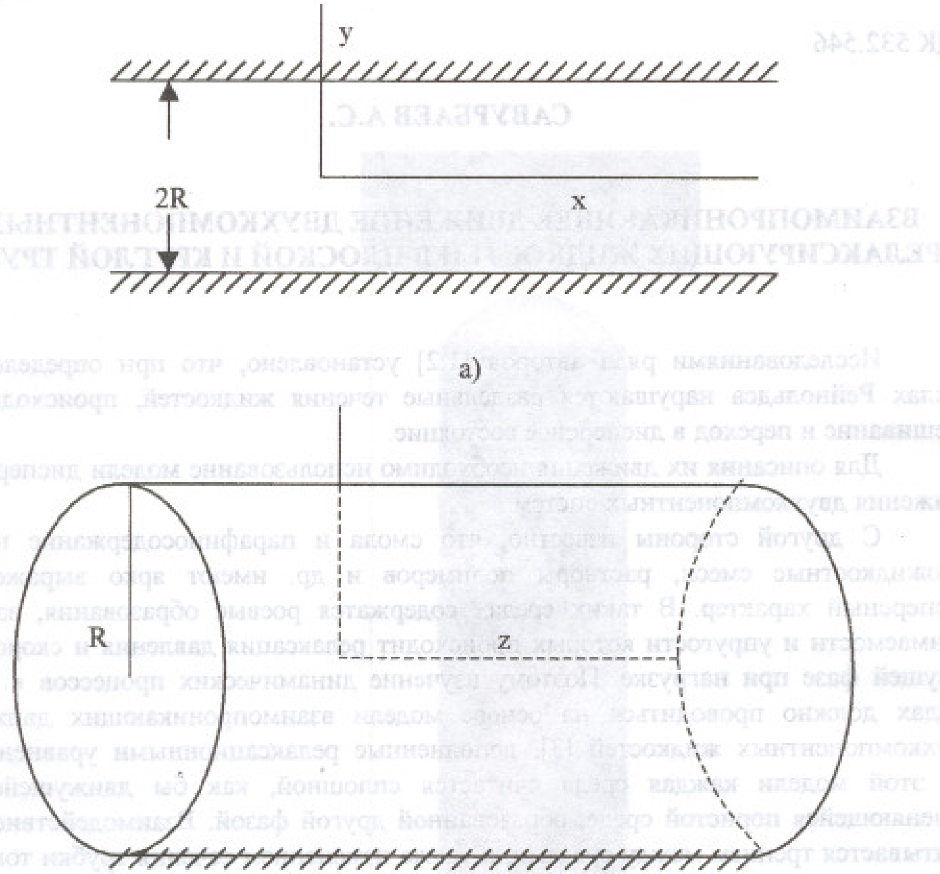
Рис.1. Схемы взаимопроникающего движения двухкомпонентных жидкостей в трубах.

θ_1, θ_2 - времена релаксации первой и второй жидкостей.

Получим уравнение движения двухкомпонентных релаксирующих жидкостей между параллельными плоскостями под действием давления

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_1\theta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = f_1\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \theta_1 k \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} + k(u_2 - u_1) - f_1\left[\theta_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right], \\ &\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \rho_2\theta_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = f_2\mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \theta_2 k \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} + k(u_1 - u_2) - f_2\left[\theta_2 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right], \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad f_1 + f_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из (3) следует, что перепад давления $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ не зависит от координат и может быть только заданной функцией от времени.



а)

б)

Рис.1. Схемы взаимопроникающего движения двухкомпонентных жидкостей в трубах.

θ_1, θ_2 - времена релаксации первой и второй жидкостей.

Получим уравнение движения двухкомпонентных релаксирующих жидкостей между параллельными плоскостями под действием давления

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_1\theta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = f_1\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \theta_1 k \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} + k(u_2 - u_1) - f_1\left[\theta_1 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right],\\
&\rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + \rho_2\theta_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = f_2\mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \theta_2 k \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} + k(u_1 - u_2) - f_2\left[\theta_2 \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\right],\\
&\qquad\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0,\\
&\qquad\qquad f_1 + f_2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Из (3) следует, что перепад давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ не зависит от координат и может быть только заданной функцией от времени.

Пусть в начальный момент обе пластинки неподвижны, и установившийся в этот момент перепад давления постоянен, т.е. начальные и граничные условия будут:

$$\left.\begin{array}{l} t=0\left\{\begin{array}{c} u_1=0,\ u_2=0 \\ \partial u_1/\partial t=0, \partial u_2/\partial t=0 \end{array}\right. \\ y=h \quad (t>0) \quad u_1=0 \quad u_2=0 \\ y=-h \quad (t>0) \quad u_1=0 \quad u_2=0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Применив преобразования Лапласа по t к уравнениям (3) и условиям (4) имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\bar{u}_1}{dy^2}-\alpha_1\bar{u}_1+\beta_1\bar{u}_2=\dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \dfrac{d^2\bar{u}_2}{dy^2}-\alpha_2\bar{u}_2+\beta_2\bar{u}_1=\dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{array}\right\} \tag{5}$$

При

$$\left.\begin{array}{l} y=h \quad \bar{u}_1=0, \quad \bar{u}_2=0 \\ y=-h \quad \bar{u}_1=0, \quad \bar{u}_2=0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_1=\dfrac{\rho_1\left(\theta_1 s^2+s\right)+k\left(\theta_1 s+1\right)}{f_1\mu_1}, \\ \beta_1=\dfrac{k\left(\theta_1 s+1\right)}{f_1\mu_1}, \\ \alpha_2=\dfrac{\rho_2\left(\theta_2 s^2+s\right)+k\left(\theta_2 s+1\right)}{f_2\mu_2}, \\ \beta_2=\dfrac{k\left(\theta_2 s+1\right)}{f_2\mu_2} \end{array}\right\} \tag{7}$$

Считая $\partial p/\partial x=A=const$ умножим первое уравнение системы (5) на N и складывая со вторым, получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(N\bar{u}_1+\bar{u}_2\right)-\left(\alpha_2-N\beta_1\right)\left(N\bar{u}_1+\bar{u}_2\right)=\left[\frac{N\left(1+\theta_1 s\right)}{\mu_1}+\frac{1+\theta_2 s}{\mu_2}\right]A, \tag{8}$$

$$N_{1,2}=\frac{-\left(\alpha_1-\alpha_2\right)\pm\sqrt{\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2+4\beta_1\beta_2}}{2\beta_1}.$$

С учетом (6) решение (8) представляется в виде:

$$A\bar{u}_1+\bar{u}_2=-A\left[\frac{N}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right]\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N\beta_1}\,h}\right].$$

Учитывая, что N имеет два значения

$$N_1\bar{u}_1+\bar{u}_2=-A\left[\frac{N_1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right]\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,h}\right],$$

$$N_2\bar{u}_1+\bar{u}_2=-A\left[\frac{N_2}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}\right]\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,h}\right],$$

откуда для изображения скоростей получим

$$\bar{u}_1=\frac{A}{N_2-N_1}\left\{\frac{\dfrac{N_1}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2}}{\alpha_2-N_1\beta_1}\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,h}\right]-\frac{\dfrac{N_2}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2}}{\alpha_2-N_2\beta_1}\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,h}\right]\right\},$$

$$\bar{u}_2=\frac{A}{N_1-N_2}\left\{\frac{\dfrac{N_2}{\mu_1}-\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\dfrac{1}{\mu_2}}{\alpha_2-N_1\beta_1}\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,h}\right]-\frac{\dfrac{N_1}{\mu_2}+\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\dfrac{1}{\mu_1}}{\alpha_2-N_2\beta_1}\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,h}\right]\right\}.$$

Переходим к оригиналу:

$$\bar{u}_t=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{A}{N_2-N_1}\left\{\frac{\dfrac{N_1}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2}}{\alpha_2-N_1\beta_1}\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_1\beta_1}\,h}\right]-\frac{\dfrac{N_2}{\mu_1}+\dfrac{1}{\mu_2}}{\alpha_2-N_2\beta_1}\left[1-\frac{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,y}{ch\sqrt{\alpha_2-N_2\beta_1}\,h}\right]\right\}\cdot e^{st}\frac{ds}{s}.$$

Подынтегральное выражение имеет точки ветвления

$s=s_1$, $s=s_2$, $s=s_3$, $s=s_4$: s_1, s_2, s_3, s_4,

четвертой степени относительно S.

Корни уравнения и полюсы $s_{1n}=\gamma_{1n}$, $s_{2n}=\gamma_{2n}$, $s_{3n}=\gamma_{3n}$, $s_{4n}=\gamma_{4n}$, где γ_{in} - корни уравнений

$$\alpha_2-N_1\beta_1=-\frac{\pi^2}{h^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\alpha_2-N_2\beta_1=-\frac{\pi^2}{h^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Таким образом, для скоростей имеем

$$u_1=-\frac{\dfrac{1}{f_1\mu_1 f_2\mu_2}}{\dfrac{1}{f_1\mu_1}+\dfrac{1}{f_2\mu_2}}A\left\{-\frac{1}{2}\left(y^2-h^2\right)+\frac{\left(\dfrac{1}{\mu_1}-\dfrac{1}{\mu_2}\right)f_2\mu_2}{\left(\dfrac{1}{f_1\mu_1}+\dfrac{1}{f_2\mu_2}\right)k}\times\right.$$

$$\times\left[1-\frac{ch\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)k}\,y}{ch\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)k}\,h}\right]\Bigg\}+\frac{4A}{\pi}\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{y}{h}\right]\times$$

$$\times\left\{\frac{\dfrac{\left[\frac{\pi^2}{h^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{(\theta^2\gamma_{in}+1)(\rho^2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\right]\frac{1}{\mu_1}+\frac{k(\theta_1\gamma_{in}+1)}{f_1\mu_1}\frac{1}{\mu_2}}{\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}+\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}-2\frac{\pi^2}{h^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\gamma_{in}}}{2\gamma_{in}\left(\frac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)+\frac{\theta_1 k+\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2 k+\rho_2}{f_2\mu_2}+\dfrac{\left(\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}\right)}{2\frac{\pi^2}{h^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}}}\right.$$

$$\left.\frac{e^{-\gamma_{in}t}}{\dfrac{-\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\Bigg)\left(2\gamma_{in}\left(\frac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)-\frac{\theta_2 k+\rho_2}{f_2\mu_2}-\frac{\theta_1 k+\rho_1}{f_1\mu_1}\right)}{\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}}}\right\}, \qquad (9)$$

$$u_2=-\frac{\frac{1}{f_1\mu_1 f_2\mu_2}}{\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}}A\left\{-\frac{1}{2}\left(y^2+h^2\right)+\frac{\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)f_1\mu_1}{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)k}\times\right.$$

$$\times\left[1-\frac{ch\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)k}\,y}{ch\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)k}\,h}\right]\Bigg\}+\frac{4A}{\pi}\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left[\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{y}{h}\right]\times$$

$$
\times\left\{\frac{\dfrac{\left[\dfrac{\pi^2}{h^2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{(\theta^2\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}\right]\dfrac{1}{\mu_2}+\dfrac{k(\theta_1\gamma_{in}+1)}{f_2\mu_2}\dfrac{1}{\mu_1}}{\dfrac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}+\dfrac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}-2\dfrac{\pi^2}{h^2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\gamma_{in}}}{2\gamma_{in}\left(\dfrac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\dfrac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)+\dfrac{\theta_1k+\rho_1}{f_1\mu_1}+\dfrac{\theta_2k+\rho_2}{f_2\mu_2}+\dfrac{\left[\left(\dfrac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}-\dfrac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\right)\right]\left[2\gamma_{in}\left(\dfrac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\dfrac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)-\dfrac{\theta_2k+\rho_2}{f_2\mu_2}-\dfrac{\theta_1k+\rho_1}{f_1\mu_1}+\dfrac{4k^2(\theta_1\theta_2\gamma_{in}+\theta_1+\theta_2)}{f_1\mu_1f_2\mu_2}\right]}{2\dfrac{\pi^2}{h^2}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}+\dfrac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}-\dfrac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}}}\right. e^{-\gamma_{in}t}
\tag{10}
$$

при $\theta_1=\theta_2=0$ из (9), (10) получим результат Латипова К.Ш., а при

$$\mu_1=\mu_2,\quad \rho_{1i}=\rho_{2i},$$

$$u=u_1=u_2=\frac{A}{2\mu}\left(h^2-y^2\right)-\frac{16h^2A}{\pi\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)}{2h}y\cdot e^{-\frac{\pi^2}{h^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\mu}{\rho}t}$$

при $t\to\infty$ результат стационарного движения.

Нетрудно доказать сходимость рядов в правой части решений.

2. Взаимопроникающее движение двухфазных сред в круглой цилиндрической трубе описывается уравнением

$$\left.\begin{aligned}\rho_1\frac{\partial u_1}{\partial t}&=f_1\mu_1\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)+k(u_2-u_1)-f_1\frac{\partial p}{\partial z}\\ \rho_2\frac{\partial u_2}{\partial t}&=f_2\mu_2\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)+k(u_1-u_2)-f_2\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Релаксация для каждой фазы:

$$\left.\begin{aligned}\theta_1\frac{\partial\tau_1}{\partial t}+\tau_1&=\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial r},\\ \theta_2\frac{\partial\tau_2}{\partial t}+\tau_2&=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial r}.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

Начальные и граничные условия:

$$\left.\begin{aligned}&\textit{при}\quad t=0\quad u_1=0,u_2=0,\\ &\textit{при}\quad r=R(t>0)\quad u_1=0,u_2=0.\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

Продифференцировав (11) по t, подставив значения $\dfrac{\partial\tau_1}{\partial t}$ из (12) и исключив τ_1, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+\theta_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\right)=f_1\mu_1\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)+k\left[\theta_1\frac{\partial}{\partial t}(u_2-u_1)+(u_2-u_1)\right]-\\
&-f_1\left[\theta_1\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}\right],\\
&\rho_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}+\theta_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}\right)=f_2\mu_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r}\right)+k\left[\theta_2\frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)+(u_1-u_2)\right]-\\
&-f_2\left[\theta_2\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Начальные и интегральные условия (13).

Применив преобразование Лапласа к уравнению (14) получим решения в виде:

$$
\begin{aligned}
u_1=&-\frac{A}{f_1\mu_1\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)}\left\{\frac{1}{4}\left(r^2-R^2\right)\frac{1}{f_2\mu_2}+\frac{\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)f_2\mu_2}{k\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)}\times\right.\\
&\left.\times\left[1-\frac{I_0\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)kr}}{I_0\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)kR}}\right]\right\}+\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\alpha_n}\frac{J_0\left(\alpha_n\frac{r}{R}\right)}{J_1(\alpha_n)}\times\\
&\times\left\{\frac{\frac{\alpha_n^2}{R^2}+\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(-\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\frac{1}{\mu_1}+\frac{k(\theta_1\gamma_{in}+1)}{f_1\mu_1}\frac{1}{\mu_2}}{\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(-\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}+\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(-\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\pm 2\frac{\alpha_n^2}{R^2}}\times\right.\\
&\times\frac{e^{-\gamma_{in}t}}{\gamma_{in}}\Bigg/\left\{2\gamma_{in}\left(\frac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)\pm\frac{\theta_1k+\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2k+\rho_2}{f_2\mu_2}+\right.\\
&+\left[\left(\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}-\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\right)\left(2\gamma_{in}\left(\frac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{\theta_2k+\rho_2}{f_2\mu_2}-\frac{\theta_1k+\rho_1}{f_1\mu_1}+4k^2\frac{\theta_1\theta_2\gamma_{in}+\theta_1+\theta_2}{f_1\mu_1f_2\mu_2}\right)\right]\Bigg/\left[2\frac{\alpha_n^2}{R}+\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(-\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}+\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(-\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\right]\right\}\right\},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
u_2=-\frac{A}{f_1\mu_1\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)}\left\{-\frac{1}{4}\left(r^2-R^2\right)\frac{1}{f_2\mu_2}+\frac{\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)f_2\mu_2}{k\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)}\times\right.
$$

$$\times\left[1-\frac{I_0\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)kr}}{I_0\sqrt{\left(\frac{1}{f_1\mu_1}+\frac{1}{f_2\mu_2}\right)kR}}\right]\Bigg]+\sum_{i=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\alpha_n}\frac{J_0\left(\alpha_n\frac{r}{R}\right)}{J_1(\alpha_n)}\times$$

$$\times\left\{\frac{\left(-\frac{\alpha_n^2}{R^2}+\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}\right)\frac{1}{\mu_2}+\frac{k(\theta_2\gamma_{in}+1)}{f_2\mu_2}\frac{1}{\mu_1}}{\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(-\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}+\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\pm 2\frac{\alpha_n^2}{R^2}}\times\right.$$

$$\times\frac{e^{-\gamma_{in}t}}{\gamma_{in}}\Bigg/\left\{2\gamma_{in}\left(\frac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)+\frac{\theta_1 k\mp\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2 k\mp\rho_2}{f_2\mu_2}\pm\right.$$

$$\pm\left[\left(\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}-\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)}{f_2\mu_2}\right)\left(2\gamma_{in}\left(\frac{\theta_1\rho_1}{f_1\mu_1}+\frac{\theta_2\rho_2}{f_2\mu_2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\theta_2 k+\rho_2}{f_2\mu_2}-\frac{\theta_1 k+\rho_1}{f_1\mu_1}+4k^2\,\frac{\theta_1\theta_2\gamma_{in}+\theta_1+\theta_2}{f_1\mu_1 f_2\mu_2}\right)\Bigg]\Bigg/\Bigg[\Bigg(-2\frac{\alpha_n^2}{R}+$$

$$\left.\left.+\frac{(\theta_1\gamma_{in}+1)(\rho_1\gamma_{in}+k)}{f_1\mu_1}-\frac{(\theta_2\gamma_{in}+1)(\rho_2\gamma_{in}+k)}{f_2\mu_2}\right)\right]\Bigg\}. \qquad (16)$$

Следует отметить, что при $\theta_1=\theta_2=0$ из (15) и (16) можно прийти к ранее полученным результатам (4), а при $\mu_1=\mu_2=\mu$ и $\rho_{1i}=\rho_{2i}=\rho$ - к формуле скорости движения вязкой однофазной жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Литература

[1]. Гужов А.И. *Совместный сбор и транспорт нефти и газа.* М., "Наука", 1973, -с. 280.

[2]. Савурбаев А.С., Субаев И. *О волнах на поверхности раздела двух жидкостей.* // Труды СамГУ. Вопросы математического анализа и его приложения. Самарканд, 1986, с.82-87.

[3]. Рахматулин Х.А. *Основы газодинамики взаимопроникающих движений.* // ПММ, т.20, вып.2, 1956, с.184-195.

[4]. Латипов К.Ш. *О некоторых задачах неустановившихся течений двухкомпонентных вязких сред.* Изв. АН УзССР, сер.тех.наук, 1963, №4, с.42-52.

[5]. Нигматуллин Р.И. *Основы механики гетерогенных сред.* М., "Наука", 1978, 331с.

[6]. Файзуллаев Д.Ф. *Ламинарное движение многофазных сред в трубопроводах.* Ташкент, "Фан", 1966, 217с.