1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.5

БАБАЕВ М.-Б.А., ТАГИЗАДЕ Э.Д.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В работе [1] одним из авторов статьи были введены "последовательные приближения" в равномерной метрике и они были оценены через обычные приближения. Здесь мы рассматриваем последовательные приближения в смешанной норме и квазинорме пространств $L_{\bar p}$ $p=(p_1,\dots,p_l)$, $0<p_j\le\infty$, $j=\overline{1,l}$. Установлены некоторые свойства этих приближений с точки зрения их связей через обычные приближения.

Пусть $u_i, i=\overline{1,m}$ попарно непересекающиеся группы переменных, состоящие из $|u_i|=n_i$ вещественных переменных. Рассмотрим множества функций $H_i\subset L_{p_i}(Q_i), Q_i\subset\mathbb{R}^{n_i}; 0<p_i\le\infty$, обладающие лишь свойством

$$\varphi_i\in H_i\Rightarrow c\varphi_i\in H_i,\quad c\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Для различных i множества H_i могут иметь различную природу: они могут быть множествами полиномов, непрерывных функций, рациональных функций, сплайнов, некоторые из них могут просто совпадать с пространством $L_{p_i}: H_i=L_{p_i}(Q_i)$ и т.д.

Обозначим через $f_{\overline{i,j}}(i\le j)$ произведение функций

$$f_{\overline{i,j}}\overset{df}{=}f_i\cdot f_{i+1}\dots f_j=\prod_{s=i}^{j}f_s,$$

а через $H_{\overline{i,j}}$ декартово произведение множеств

$$H_{\overline{i,j}}=H_i\times H_{i+1}\times\dots\times H_j=\prod_{s=i}^{j}H_s$$

Кроме того, $p_{\overline{i,j}}=(p_i,p_{i+1},\dots p_j)$, в частности $\bar p=p_{\overline{1,m}}=(p_1,\dots,p_m)$. Пусть функции $f_i(U_i)\in L_{p_i}(Q_i), i=\overline{1,m}$. Рассмотрим наилучшие приближения функции $F=f_{\overline{1,n}}=\prod_{s=1}^{m}f_s(U_s)$ множеством $H_{\overline{1,m}}=\prod_{s=1}^{m}H_s$ в пространстве $L_{\bar p}(Q)$, $\bar p=(p_1,\dots,p_m), Q=Q_1\times\dots\times Q_m$: обычное

$$E_{F,\bar p}=E\left[F;H_{\overline{1,m}}\right]_{\bar p}=\inf_{\substack{\varphi_i\in H_i\\ i=\overline{1,m}}}\left\|F-\prod_{1}^{m}\varphi_s\right\|_{L_{\bar p}}=$$

$$=\inf_{\substack{\varphi_i\in H_i\\ i=\overline{1,m}}}\left(\int_{Q_m}\left(\int_{Q_{m-1}}\cdots\left(\int_{Q_1}\left|\prod_{s=1}^{m}f_s-\prod_{s=1}^{m}\varphi_s\right|^{p_1}du_1\right)^{p_2/p_1}\cdots\right)^{p_m/p_{m-1}}du_m\right)^{1/p_m}=$$

$$= \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{1,m}}} \left\| \left\| \ldots \left\| \prod_1^m f_s - \prod_1^m \varphi_s \right\|_{L_{p_1}(Q_1)} \ldots \right\|_{L_{p_{m-1}}(Q_{m-1})} \right\|_{L_{p_m}(Q_m)};$$

и последовательные

$$E\left\{ E\left[F, H_{\overline{1,k}}\right]_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} =$$

$$= \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{k+1,m}}} \left\| \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{1,k}}} \left\| F - \varphi_{\overline{1,k}} \right\|_{L_{p_{\overline{1,k}}}(\psi_{\overline{1,k}})} - \varphi_{\overline{k+1,m}} \right\|_{L_{p_{\overline{k+1,m}}}(Q_{\overline{k+1,m}})}.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы*

$$E\left\{ E\left[F; H_{\overline{1,k}}\right]_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} = E\left\{ E\left[F; H_{\overline{k+1,m}}\right]_{p_{\overline{k+1,m}}}; H_{\overline{1,k}} \right\}_{p_{\overline{1,k}}} \tag{2}$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$E_{f_{\overline{1,k}}, p_{\overline{1,k}}}; E_{\left|f_{\overline{1,k}}\right|, p_{\overline{1,k}}} = E_{f_{\overline{k+1,m}}, p_{\overline{k+1,m}}}; E_{\left|f_{\overline{k+1,m}}\right|, p_{\overline{k+1,m}}} \tag{3}$$

Для доказательства теоремы 1 понадобится следующее предложение, представляющее самостоятельный интерес:

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$E\left\{ E\left[f_{\overline{1,m}}; H_{\overline{1,k}}\right]_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} = E_{f_{\overline{1,k}}, p_{\overline{1,k}}} \cdot E_{\left|f_{\overline{k+1,m}}\right|, p_{\overline{k+1,m}}} \tag{4}$$

Используется свойство (I) с помощью следующих преобразований получим утверждение леммы

$$E\left\{ E\left[f_{\overline{1,m}}; H_{\overline{1,k}}\right]_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} = E\left\{ \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{1,k}}} \left\| \prod_1^m f_i - \prod_1^k \varphi_i \right\|_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} =$$

$$= E\left\{ \left| \prod_{k+1}^m f_i \right| \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{1,k}}} \left\| \prod_1^k f_i - \prod_1^k \varphi_i \right\|_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} =$$

$$= E\left\{ \left| \prod_{k+1}^m f_i \right| E\left[\prod_1^k f_i; H_{\overline{1,k}} \right]_{p_{\overline{1,k}}}; H_{\overline{k+1,m}} \right\}_{p_{\overline{k+1,m}}} =$$

$$= \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{k+1,m}}} \left\| E\left[\prod_1^k f_i; H_{\overline{1,k}} \right]_{p_{\overline{1,k}}} \left| \prod_{k+1}^m f_i \right| - \prod_{k+1}^m \varphi_i \right\|_{p_{\overline{k+1,m}}} =$$

$$= E\left[\prod_1^k f_i; H_{\overline{1,k}} \right]_{p_{\overline{1,k}}} \inf_{\substack{\varphi_i \in H_i \\ i=\overline{k+1,m}}} \left\| \left| \prod_{k+1}^m f_i \right| - \prod_{k+1}^m \varphi_i \right\|_{p_{\overline{k+1,m}}} = E_{f_{\overline{1,k}}, p_{\overline{1,k}}} \cdot E_{\left|f_{\overline{k+1,m}}\right|, p_{\overline{k+1,m}}}$$

Используя лемму 1 теперь нетрудно убедиться в справедливости теоремы 1.

Достаточность. Пусть имеет место равенство (3). Аналогично тому, как было получено соответствие (4) можно получить соотношение

$$E\left\{ E\left[f_{\overline{1,m}}; H_{\overline{k+1,m}}\right]_{p_{\overline{k+1,m}}}; H_{\overline{1,k}} \right\}_{p_{\overline{1,k}}} = E_{\left|f_{\overline{1,k}}\right|, p_{\overline{1,k}}} \cdot E_{f_{\overline{k+1,m}}, p_{\overline{k+1,m}}} \tag{5}$$

Теперь перепишем равенство (3) в виде

$$E_{f_{\overline{1,k}},P_{\overline{1,k}}} \cdot E_{\left|f_{\overline{k+1,m}}\right|,P_{\overline{k+1,m}}} = E_{\left|f_{\overline{1,k}}\right|,P_{\overline{1,k}}} \cdot E_{f_{\overline{k+1,m}},P_{\overline{k+1,m}}} \tag{6}$$

Подставляя в это равенство соответствующее им выражения (4) и (5) получим равенство (2). Достаточность доказана.

Необходимость. Подставляя в левую и правую части равенства (2) соответствующие им выражения из (4) и (5) получим равенство (6), что равносильно (3). Теорема 1 доказана.

Следствие. Справедливо равенство

$$E\left\{\ldots E\left\{E\left\{\prod_1^m f_i; H_1\right\}_{P_1}; H_2\right\}_{P_2} \ldots H_n\right\}_{P_n} = E_{f_1,P_1} \cdot E_{|f_2|,P_2} \ldots E_{|f_n|,P_n}$$

В работе [1] введен следующий класс функций:

Пусть $t=\left(t_1,t_2,\ldots,t_m\right)$, где $t_i=\left(x_{k_{i-1}+1},x_{k_{i-1}+2},\ldots,x_{k_i}\right)$, $i=\overline{1,m}$, $0=k_0<k_1<\ldots$ $\ldots<k_m=n$, представляет собой некоторое деление множества переменных $t=\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}$ на m групп. Рассмотрим вещественную функцию $f=f(t)=$ $=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=f\left(t_1,\ldots,t_m\right)$ определенную в параллелепипеде $\left[a_1;b_1;\ldots;a_n,b_n\right]$, который будем обозначать через $T_m=\left[c_1,d_1;\ldots;c_m,d_m\right]$ где $c_i=\left(a_{k_{i-1}+1},\ldots,a_{k_i}\right)$, $d_i=\left(b_{k_{i-1}+1},\ldots,b_{k_i}\right)$, $i=\overline{1,m}$. Обозначим через $\prod_{\bar{k}\overline{1,m}}=\prod_{\bar{k}\overline{1,m}}(T_m)$ класс функций f для произвольных $x''_\nu \geq x'_\nu$, $\nu=1,m$ удовлетворяющих условию

$$\dot{L}_m(f,S)=\prod_{j=1}^{2^m}(-1)^{\delta_j} f\left(P_j\right) \geq 0,$$

где P_j всемозможные “вершины” параллелепипеда

$$S=\left[t'_1,t''_1;\ldots;t'_m,t''_m\right] \subset T_m,$$

δ_j - количество t'_j, $j=\overline{1,m}$, являющихся координатами точки P_j. Обозначим через $\prod^*_{\bar{k}\overline{1,m}}$ класс функций f, для которых $(-f) \in \prod_{\bar{k}\overline{1,m}}$. В [1] предложен простой способ вычисления наилучшего приближения функций из классов $\prod_{\bar{k}\overline{1,m}}$ и $\prod^*_{\bar{k}\overline{1,m}}$ суммами функций меньшего числа переменных. В случае $m=n=2$ класс $\prod_{\bar{k}\overline{1,m}}$ превращается в ранее введенный класс $\prod_{1,1} \overset{df}{=} \prod$ (см. [2]).

Известно, что значения наилучших приближений функции f и абсолютного значения $|f|$, вообще говоря, различны, т.е. равенство $E_f=E_{|f|}$ не всегда имеет место. Более, того, в [1] построены примеры, показывающие, что вообще из

$$f \in \prod \nRightarrow |f| \in \prod \cup \prod^*$$

и наоборот, из

$$|f| \in \prod \nRightarrow f \in \prod \cup \prod^*$$

Поэтому, естественно желание найти связь между приближениями $E_{|f|}$ и E_f. Приведем одно соотношение между обычными и последовательными приближениями, в процессе установления которого будет дан ответ и на этот вопрос.

Теорема 2. *Если классы* H_i *в теореме 1 вместе с функциями* φ_i *содержат также функции* $|\varphi_i|$, *то*

$$E\left\{E\left[\prod_1^m f_i; H_{\overline{1,k}}\right]; H_{\overline{k+1,m}}\right\}_{P_{k+1,m}} \le E_{f_{\overline{1,k}}, P_{\overline{1,k}}} \cdot E_{f_{k+1,m}, P_{k+1,m}}$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится простая, но важная лемма.

Обозначим через $G = \{\sigma\}$ класс вещественных функций

$$\sigma \in L_{\bar{p}}(Q),\ \ Q \subset \mathbb{R}^l, \text{ где } \bar{p} = \{p_1, \ldots, p_l\}.$$

Рассмотрим наилучшее приближение функции $F \in L_p(Q)$ классом G

$$E_{F,\bar{P}} = E[F,G]_{\bar{P}} = \inf_{\sigma \in G}\|F-\sigma\|_{\bar{P}}.$$

Пусть $\{|\sigma|\} \subset \{\sigma\}$. Несмотря на то, что $|F| \ge F$, имеет место

Лемма 2. *Справедливы соотношения*

$$E_{|F|,\bar{P}} = E\left[|F|, \{|\sigma|\}\right]_{\bar{P}} \le E_{F,\bar{P}} \tag{7}$$

Доказательство. Из очевидного

$$|F| - |\sigma| \le |F| - \sigma \Rightarrow |F| - |\sigma| \le \left|F - \sigma\right|,$$

откуда

$$\left\||F| - |\sigma|\right\|_{\bar{P}} \le \|F - \sigma\|_{\bar{P}}$$

что влечет

$$E\left[|F|, \{|\sigma|\}\right]_{\bar{P}} \le E\left[|F|, \{\sigma\}\right]_{\bar{P}} \tag{8}$$

Вложение $\{|\sigma|\} \subset \{\sigma\}$ позволяет написать

$$E\left[|F|, \{\sigma\}\right]_{\bar{P}} \le E\left[|F|, \{|\sigma|\}\right]_{\bar{P}} \tag{9}$$

Согласно неравенствам (8) и (9) получаем левое соотношение из (7):

$$E_{|F|,\bar{P}} = E\left[|F|, \{|\sigma|\}\right]_{\bar{P}} \tag{10}$$

Учитывая (10) далее имеем

$$E\left[|F|, \{|\sigma|\}\right]_{\bar{P}} = \inf_{\sigma \in G}\left\||F| - \sigma\right\|_{\bar{P}} \le \inf_{\sigma \in G}\|F - \sigma\|_{\bar{P}} = E_{F,\bar{P}}$$

что представляет собой правое соотношение из (7). Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 2 в лемме 2 положим $F = f_{k+1}, \ldots, f_m$. Тогда согласно правому соотношению в (7)

$$E\left[\left|\prod_{k+1}^m f_i\right|; H_{\overline{k+1,m}}\right]_{P_{\overline{k+1,m}}} \le E\left[\prod_{k+1}^m f_i; H_{\overline{k+1,m}}\right]_{P_{\overline{k+1,m}}} = E_{f_{\overline{k+1,m}}, P_{\overline{k+1,m}}}$$

Остается использовать последнее неравенство в (4) и (5).
Теорема 2 доказана.

Литература

[1]. Бабаев М-Б.А. *Последовательные приближения. Современные проблемы теории функций.* Материалы всесоюзной школы по теории функций, Баку, 1980, с.58-64.

[2]. Бабаев М-Б.А. *Приближение функций трех переменных суммами функций двух*

переменных. Сообщ. АН Груз.ССР, т.83:2, с.9-12.

[3]. Бабаев М-Б.А. *О приближении многочленов двух переменных суммами функций одной переменной.* ДАН СССР, т.193:5, 967-969.

Babayev M.-B.Ə., Tağızadə E.C.