1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 532.542

САТТАРОВ Р.М., МАМЕДОВ Р.М.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ТРУБОПРОВОДНОМ ТРАНСПОРТЕ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

В последнее время интерес к исследованиям распространения нелинейных волн в реальных жидкостях возрастает (1-3). Это связано с тем, что при линеаризации систем уравнений, описывающих сложные реальные процессы, могут быть утеряны особенности, которые приводят к качественно новым эффектам. Отмеченные особенности нелинейных явлений, как правило, проявляются в нарушении принципа суперпозиции, характерного для линейных задач, в возникновении диссипативных структур, автоколебательных процессов, а также различного рода регулярных и эволюционных эффектов.

Задачи распространения волн возмущений в реальных жидкостях сводятся в общем виде к исследованию системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с диссипативным членом. Часто для упрощения исследований система уравнений может сводиться либо к гиперболическому уравнению без диссипации , либо к уравнению параболического типа.

Для линеаризованных уравнений эти постановки отличаются конечной (гиперболический тип уравнений) или бесконечной (параболический тип уравнений) скоростями распространения волн возмущений.

Для нелинейных уравнений могут и не иметь место такие явные отличительные особенности.

Широкое развитие нелинейной механики применительно к течениям нефтей и газов в пористых средах и трубах получили исследования под руководством А.Х.Мирзаджанзаде [4,5].Следуя А.Х. Мирзаджанзаде в данной работе делается попытка исследования некоторых аспектов теории распространения волн возмущений в сплошных нелинейных средах, которые формулируются как дифференциальные уравнения соответствующих математических моделей эволюции реальных жидкостей.

1. Система дифференциальных уравнений, описывающих динамику реальной жидкости в трубах, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\chi}{\rho_0 f_0}\tau(W),\\ \frac{\partial \rho W}{\partial x}&=-\frac{1}{C^2}\frac{\partial P}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $C^2=\dfrac{dP}{d\rho}$ - скорость распространения волны возмущения, в общем случае зависящая от давления. Если положить скорость распространения волны постоянной C_0, то в бегущей координате $\xi=x-C_0t$ система уравнений запишется следующим образом:

$$W\frac{dW}{d\xi}=\frac{\chi}{\rho_0 f_0}\tau(W). \quad (2)$$

С другой стороны система дифференциальных уравнений (1) приближенно (принимая $\frac{\partial}{\partial t}=-C_0\frac{\partial}{\partial x}, C_0\rho_0 W=P$) может быть записана как

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial W^2}{\partial x}=-C_0\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\chi}{\rho_0 f_0}\tau(W), \quad (3)$$

которая в координатах ξ также сводится к (2).

Если положить что волна распространяется в круглой трубе с вязкой жидкостью, то уравнение (2) примет вид

$$\frac{dW}{d\xi}=-2a, \quad (4)$$

где $2a=\frac{8\mu}{R^2\rho_0}, \frac{\chi}{f_0}=\frac{2}{R}$.

Решение (4) типа бегущей волны имеет особенно простой вид:

$$W(x,t)=2a(C_0 t-x), t\geq 0, x>0. \quad (5)$$

Для жидкостных систем, подчиняющихся зависимости

$$\tau=-\frac{4\mu}{R}(1-\gamma_0 W+\gamma_1 W^2)W, \quad (6)$$

уравнение (2) представится в виде

$$\frac{dW}{d\xi}=-2a(1-\gamma_0 W+\gamma_1 W^2) \quad (7)$$

Решения уравнения (7) в зависимости от $\Delta=4\gamma_1+\gamma_0^2$ имеет вид:

$$W=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\gamma_1}tg\left[\frac{2a\sqrt{\Delta}}{2}(C_0 t-x)\right]-\frac{\gamma_0}{2\gamma_1}, \quad (для\ \Delta>0), \quad (8)$$

$$W=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\gamma_1}th\left[\frac{2a\sqrt{-\Delta}}{2}(x-C_0 t)\right]-\frac{\gamma_0}{2\gamma_1}, \quad (для\ \Delta<0), \quad (9)$$

Анализ решения (8) показывает, что оно определено на ограниченном интервале изменения $0\leq x\leq C_0 t, [0,T)$, где $T=\frac{\pi}{2a\sqrt{\Delta}C_0}$, причем при $x_0>C_0 t, W+\frac{\gamma_0}{2\gamma_1}=0$.

Граничное условие отвечающее (8) при $x=0$ имеет вид

$$v(0,t)\equiv W(0,t)+\frac{\gamma_0}{2\gamma_1}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\gamma_1}tg\left(\frac{2\sqrt{\Delta}}{2}C_0 t\right), \quad 0\leq t<T. \quad (10)$$

и следовательно, $w(t,0), v(t,0)\to\infty$ при $t\to T$.

Несмотря на то, что на границе может происходить режим с обострением (неограниченный рост скорости), возникающие возмущения при этом, проникают лишь на конечную глубину $L=\frac{\pi}{2a\sqrt{\Delta}}$, т.е. $v(x,t)\equiv 0$ для всех $x\geq L$ в течение всего времени существования решения $t\in(0,T)$. Причем в этом случае всюду, за исключением $x=0$, решение ограничено сверху по t:

$$v(x,t) \le v(x,T) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2\gamma_1} tg \dfrac{2a\sqrt{\Delta}}{2}\left(\dfrac{\pi}{2a\sqrt{\Delta}} - x\right), & 0 < x < \dfrac{\pi}{2a\sqrt{\Delta}}, \\ 0, & x \ge \dfrac{\pi}{2a\sqrt{\Delta}}. \end{cases}$$

Решение же (9) описывает структуру ударной волны и стремится к постоянным состояниям $v \to v_1$ при $\xi \to \infty$ и $v \to v_2$ при $\xi \to -\infty$.

2.Пологая, что конвективная составляющая по сравнению с локальной составляющей пренебрежимо мала, система (1) для обобщенной вязкой жидкости $(\tau = -\dfrac{4\mu}{R}W)$ примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho W}{\partial t} + 2a\rho W = -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \rho W}{\partial x} = -\frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Система (11)относительно давления P запишется

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int \frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t}dx\right] + 2a\left[\int \frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t}dx\right] = \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{12}$$

Решение (12) может быть представлено в виде бегущей волны

$$P(x,t) = f_\Gamma(\xi), \quad \xi = x - ut. \tag{13}$$

Подставляя выражение (13) в (12), после некоторых преобразований, получаем:

$$K(f_\Gamma)\frac{df_\Gamma}{d\xi} = -u,$$

$$K(f_\Gamma) = \left[1 - \frac{u^2}{C^2(f_\Gamma)}\right]\frac{1}{2a(f_\Gamma)\rho(f_\Gamma)}. \tag{14}$$

При заданных $C^2(f_\Gamma), 2a(f_\Gamma), \rho(f_\Gamma)$ решение представимо в явном виде. Однако качественное поведение f_Γ нетрудно установить непосредственно из (14).

Представляет интерес выявление условия существования решения, стремящегося к $P \to P_1$ при $\xi \to \infty$ и $P \to P_2$ при $\xi \to -\infty$. Значения P_1, P_2 являются нулями для $2a(f_\Gamma)\rho(f_\Gamma)$ в общем случае это простые нули. Если между этими нулями $2a(f_\Gamma)\rho(f_\Gamma) > 0$ и $\left[1 - \dfrac{u^2}{C^2(f_\Gamma)}\right] > 0$ то $\dfrac{df_\Gamma}{d\xi} < 0$ и f_Γ монотонно возрастает от $f_{\Gamma 1}$ на $+\infty$ до $f_{\Gamma 2}$ на $-\infty$. Если $2a(f_\Gamma)\rho(f_\Gamma) > 0$ и $\left[1 - \dfrac{u^2}{C^2(f_\Gamma)}\right] < 0$, то $\dfrac{df_\Gamma}{d\xi} > 0$ и решение возрастает от $f_{\Gamma 2}$ на $-\infty$ до $f_{\Gamma 1}$ на $+\infty$. При $\left[1 - \dfrac{u^2}{C^2(f_\Gamma)}\right] \to 0$, профиль волны сжимается в направлении ξ и в пределе превращается в ступенчатый переход от $f_{\Gamma 1}$ и $f_{\Gamma 2}$, перемещающийся со скоростью $C(f_\Gamma) = u = C_0$.

Следуя (6) и полагая, что

$$\int_0^1 K(f)df < \infty, \tag{15}$$

вводится функция

$$\Phi(\mathcal{P}) = \int_0^{\mathcal{P}} K(f)df\,,\ \mathcal{P} \geq 0;\ \Phi(0) = 0 \tag{16}$$

Тогда из (14) следует $\Phi(f_\Gamma(\xi)) = -u(\xi - \xi_0), \quad \xi \leq \xi_0 = const$. Пусть $\xi_0 = 0$, тогда

$$f_\Gamma(\xi) = \Phi^{-1}(-u\xi), \quad \xi \leq 0,$$

где Φ^{-1} – функция обратная к Φ (она может существовать в силу монотонности Φ). Продолжая f_Γ в область $\{\xi > 0\}$ тождественным нулем, получаем следующее автомодельное решение:

$$P(x,t) = \Phi^{-1}[u(ut - x)_+], \quad t > 0, \quad x \in R, \tag{17}$$

где введено обозначение

$$(\chi)_+ = \{\chi, \text{если } \chi \geq 0; 0, \text{если } \chi < 0\}.$$

Принимая $T = \Phi(\infty)/u^2 \leq \infty$, решение (17) выполняется при условии

$$P(x,0) = 0, x > 0;\ P(0,t) = \Phi^{-1}(u^2 t), 0 \leq t \leq T. \tag{18}$$

Рассматривается для определенности случай, когда

$$C(f_\Gamma) = C > u, \rho(f_\Gamma) = \rho_0, 2a(f_\Gamma) = 2a_0 f_\Gamma^{\,n}, \quad n = const > 0\ (n \neq 1).$$

Тогда $\Phi(f_\Gamma) = \dfrac{K_0}{1-n} f_\Gamma^{1-n}, \quad \Phi^{-1}(f_\Gamma) = \left(\dfrac{1-n}{K_0} f_\Gamma\right)^{\frac{1}{1-n}},$

решение типа бегущей волны имеет вид

$$P(x,t) = \left[\frac{1-n}{K_0} u(ut - x)_+\right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad K_0 = \left[1 - \frac{u^2}{C^2}\right]\frac{1}{2a_0\rho_0}. \tag{19}$$

При $0 \leq n < 1, t \geq 0, \quad T = \infty$ массовый поток, который определяется как

$$\rho W = -\int \frac{1}{C^2}\frac{\partial P}{\partial t}dx = \frac{u}{C^2}\left[\frac{1-n}{K_0}u(ut - x)\right]^{\frac{1}{1-n}},$$

в точках $x_\Phi(t) = ut$ является непрерывным, т.е.

$$\rho W\left(t, x'_\Phi(t)\right) = \rho W\left(t, x^-_\Phi(t)\right) = \rho W\left(t, x_\Phi(t)\right) = 0 \text{ при всех } t > 0.$$

3. Если предположить, что силы сопротивления намного преобладают над инерционными составляющими, то система (1) для обобщенной вязкой жидкости имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &2a\rho W = -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ &\frac{\partial \rho W}{\partial x} = -\frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Система (20) относительно $\rho(x,t)$ записывается в общем виде как нелинейное уравнение параболического типа

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C^2(\rho)}{2a(\rho)}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{21}$$

Здесь $K(\rho)=\dfrac{C^2(\rho)}{2a(\rho)}$ имеет смысл обобщенного коэффициента нелинейного сопротивления, зависящего от плотности (давления). Коэффициента К предполагается неотрицательной и достаточно гладкой функцией.

Систему (20) относительно $P(x,t)$ можно записать аналогично вышеприведенному:

$$2a\left[\int \frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t}dx\right]=\frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (22)$$

Между уравнениями (21) и (22) существует определенная аналогия. Если положить, что решение существует в виде бегущей волны, то эти уравнения сводятся к виду

$$K_v\frac{df_v}{d\xi}=-u \qquad (23)$$

при $v=\rho, K_\rho=\dfrac{C^2(f_\rho)}{2a(f_\rho)f_\rho}, f_\rho(\xi)=\rho(x,t);$

при $v=P, K_p=\dfrac{1}{2a(f_p)\rho(f_p)}, f_p(\xi)=P(x,t)$.

Видно, что уравнение (23) соответствует (14). Поэтому вышеизложенное для уравнения (14) имеет место и для (23). Если принять $\rho(f_p)=\rho_0$ $2a(f_p)=2a_0f_p^n$, $n=const>0, (n\neq 1)$, то при условии (18) решение (23) примет вид

$$P(x,t)=\left[\frac{1-n}{K_p^0}u(ut-x)_+\right]^{\frac{1}{1-n}} \quad 0\le n<1, t\ge 0, x>0, \qquad (24)$$

где $K_p^0=\dfrac{1}{2a_0\rho_0}$.

Сравнение (24) с (19) показывает их полное сходство, с той лишь разницей, что коэффициенты K_0 и K_p^0 отличаются на мультипликативную величину $\left(1-\dfrac{u^2}{C^2}\right)$.

Если решение (19) уравнения описывает волну сжатия, то решение (24) уравнения (22) описывает сдвиговую волну, движущуюся по невозмущенному фону жидкости.

4.Рассмотрим движение неньютоновской жидкости, плотность и закон сопротивления которой подчиняются степенным зависимостям. При определенных условиях (инерционные силы намного меньше сил сопротивления) задача может быть сведена к решению уравнения (21). Предпологая , что $C^2(\rho)=C_0^2\rho^{*}$ и $2a(\rho)=2a_0\rho^n$ уравнение (21) запишется как:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho^r\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}, \quad t>0, x>0, \quad r=m-n=const>0, \qquad (25)$$

$$\rho(x,0)=\rho_0(x)\ge 0,\ x>0, \quad \rho_0^{r+1}\in C^1(R_+), \qquad (26)$$

$$\rho(0,t)=\rho_1(t)>0, \quad t>0. \qquad (27)$$

Следуя (6) , можно показать несколько особых режимов динамики для указанных жидкостей, при различных граничных изменениях. Так, при граничном условии

$\rho_1(t)=(T_0-t)^h \quad h=-\frac{1}{r},\ 0<t<T_0$ согласно (4) решение (25) имеет вид остановившейся сдвиговой волны

$$\rho(x,t)=(T_0-t)^{-\frac{1}{r}}\left[\left(1-\frac{x}{x_0}\right)_+\right]^{\frac{2}{r}},\quad x_0=\left[\frac{2(r+2)}{r}\right]^{\frac{1}{r}}. \tag{28}$$

Фронт волны, как видно из (28), $x_\Phi(t)=x_0$ в течение всего времени обострения $t\in(0,T_0)$ не меняется. Нетрудно показать условия выполнения как HS - режимы обострения, так и LS- режима обострения, приводящего к локализации сдвиговой волны.

5.Для исследования особенностей эволюции волн в вязкоупругой жидкости, воспользуемся олдройдовской моделью типа

$$\theta\frac{\partial\tau}{\partial t}+\tau=\frac{8\mu}{D}\left(W+\lambda\frac{\partial W}{\partial t}\right). \tag{29}$$

Система (1) с учетом (29), после некоторых предположений и преобразований, относительно $\rho(x,t)$ запишется

$$\theta\frac{\partial}{\partial t}\left[C^2(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\right]=(1+2a\lambda)\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\partial\rho}{\partial t}dx-C^2(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial x}-2a\int\frac{\partial\rho}{\partial t}dx. \tag{30}$$

Решение (30) ищется в виде бегущей волны

$$\rho(x,t)=\rho_A(\xi),\quad \xi=x-ut. \tag{31}$$

подстановка (31) в (30) дает обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\theta u\frac{d}{d\xi}\left[u^2-C^2(\rho)\right]\frac{d\rho}{d\xi}+\left[C^2(\rho)-u^2(1+2a\lambda)\right]\frac{d\rho}{d\xi}+2au\rho=0. \tag{32}$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения может быть осуществлено при конкретно заданных параметрах (в частности скорость волны, коэффициент трения) от функции плотности.

С целью выявления особенностей решения для вязкоупругих жидкостей ниже рассматриваются некоторые частные решения уравнения (32). Пусть $C^2(\rho)=u^2+\alpha\rho^n$ и $2a=2a_0\rho^n$. Тогда (32) запишется

$$\frac{d^2\rho_A^{n+1}}{d\xi^2}+\frac{\left[2a\lambda u^2-\alpha\right]}{\alpha\theta u}\frac{d^2\rho_A^{n+1}}{d\xi}-\frac{2a_0(n+1)}{\alpha\theta}\rho_A^{n+1}=0. \tag{33}$$

Формальный асимптотический анализ уравнения (33), удовлетворяющего условию $\rho_A\to 0$ при $\xi\to\infty$, дает нетривиальное решение вида

$$\rho_A^{n+1}=C_1\exp(\beta\xi),\quad C_1>0, \tag{34}$$

где

$$\beta=\frac{-\left(2a_0\lambda u^2-\alpha\right)-\sqrt{\left(2a_0\lambda u^2-\alpha\right)^2+4\alpha\theta u^2 2a_0(n+1)}}{2\alpha\theta u}.$$

Из (34) видно, что увеличение времени ретардации λ и уменьшение времени релаксации θ приводит к более интенсивному затуханию плотности вязкоупругой жидкости.

Теперь предположим, что на границе $x=0$ имеет место режим с обострением, т.е. когда значение функции давления обращается в бесконечность за некоторый конечный момент времени $t=T>0$ (момент обострения).

Тогда для вязкоупругой жидкости процесс распространения волны может быть описан дифференциальным уравнением (30), которое относительно $P(t,x)$ записывается в виде

$$\theta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{1}{C^2(p)}\frac{\partial P}{\partial t}dx+(1+2a\lambda)\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t}dx+2a\int\frac{1}{C^2(P)}\frac{\partial P}{\partial t}dx= \\ =\theta\frac{\partial^2 P}{\partial t\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{35}$$

С начальным условием

$$P(x,0)=P_0(x)\geq 0,\quad x>0,\quad \sup P_0<\infty \tag{36}$$

и граничным условием

$$P(0,t)=P_1(t)>0,\ 0<t<T,\quad P_1\in C^1([0,T]);\ P_1(t)\to\infty, t\to T^-. \tag{37}$$

Пусть в рассматриваемой задаче выполняются следующие зависимости:

$$C^2(P)=\alpha P^n,\quad 2a=2a_0\left(1-\frac{x}{x_S}\right)^{-1}P^{\frac{n}{2}},\quad \theta=\beta_\theta(T-t),$$

$$\lambda=\beta_\lambda(T-t),\quad \alpha=const>0,\quad 2a_0=\frac{8\mu_0}{\rho R^2}=const>0,$$

$$n=const>0,\quad \beta_\theta=\frac{\theta}{T}=const>0,\quad \beta_\lambda=\frac{\lambda}{T}=const>0.$$

$$P_1(t)=A_s(T-t)^{-\frac{2}{n}},\quad t<T,\quad A_S=const>0, \tag{38}$$

$$P_0(x)=\begin{cases}A_S T^{-\frac{2}{n}}\left(1-\dfrac{x}{x_S}\right)^{\frac{2}{n}}, & 0<x\leq x_S\\ 0, & x_S>0,\end{cases} \tag{39}$$

где x_S – глубина проникновения волны.

При принятых предложениях решение указанной задачи в разделяющихся переменных имеет вид

$$P(x)=\begin{cases}A_S T^{-\frac{2}{n}}\left(1-\dfrac{x}{x_S}\right)^{\frac{2}{n}}, & 0<x\leq x_S,\\ 0, & x>x_S\end{cases} \tag{40}$$

где

$$x_S=\left[\frac{\alpha A_S^n\left(\frac{2}{n}-1\right)\left(\frac{2}{n}\beta_\theta+1\right)}{\left(\frac{2}{n}-1\right)\left(\frac{2}{n}\beta_\theta+1\right)+2a_0A_S^{n/2}(1+\beta_\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{41}$$

Анализ (41) показывает, что x_S имеет действительное значение в случаях:

а) $\frac{2}{n}>1$ и $\beta_\theta\geq\frac{n}{2}$ или $\theta<\dfrac{\frac{2}{n}-1-2a_0A_S^{n/2}(1+\beta_\lambda)}{\left(\frac{2}{n}-1\right)\frac{2}{n}}<\beta_\theta<\frac{n}{2}$, б) $\frac{2}{n}<1$ и $\frac{n}{2}<\beta_\theta<\frac{\frac{2}{n}-1-2a_0A_S^{n/2}(1+\beta_\lambda)}{\left(\frac{2}{n}-1\right)\frac{2}{n}}$,

причем в первом случае увеличение параметров релаксации (β_θ) и ретардации (β_λ) уменьшает глубину проникновения волны, во втором же случае увеличение параметра релаксации (β_θ) и уменьшение параметра ретардации (β_λ) увеличивает глубину проникновения. Следует отметить, что при $\beta_\theta\to\frac{\frac{2}{n}-1-2a_0A_S^{n/2}(1+\beta_\lambda)}{\left(\frac{2}{n}-1\right)\frac{2}{n}}$, $x_S\to\infty$, т.е. в этом случае не имеет место локализации волн возмущения.

Показаны также условия возникновения режимов обострения и локализации в вязкоупругих жидкостях, когда инерционные составляющие пренебрежимо малы по сравнению с силами сопротивления.

Обозначения

W- средняя по сечению скорость жидкости, ρ -плотность,
P—давление, χ -смоченный периметр, *f*- площадь поперечного сечения трубы, τ - касательное напряжение, c, u- скорость распространения волны, x- направление потока, t- время.

Литература

[1]. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир 1977, 624 с.
[2]. Лайтхилл Дж. *Волны в жидкостях.* М.: Мир 1981, 600 с.
[3]. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику.* М.: Наука, 1980, 368 с.
[4]. Мирзаджанзаде А.Х., Максудов Ф.Г., Нигматулин Р.И. и др. *Теория и практика применения неравновесных систем в нефтедобыче.* -М.: Баку: Элм, 1985, 220 с.
[5]. Мирзаджанзаде А.Х., Шахвердиев А.Х. *Динамические процессы в нефтедобыче.* М.: Наука, 1997, 224 с.
[6]. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов, С.П., Михайлов А.П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.* М.: Наука, 1987, 480 с.