УДК 517.97

ГАДЖИЕВА Р.О.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

1. Постановка задачи.

Известно, что дифференциальное уравнение колебаний пластины имеет вид (см. [1]):

$$\frac{\rho(x_1,x_2)}{G}h(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(h(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(h(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)=0$$

где $\rho(x_1,x_2)$ - плотность пластины в точке (x_1,x_2), G - натяжение пластины, $h(x_1,x_2)$ - толщина платины, $u(t,x_1,x_2)$ - нормальное смещение точки (x_1,x_2) в момент времени t.

Там же, предполагая, что

$$u(t,x_1,x_2)=w(x_1,x_2)\cdot f(t),$$

где $f(t)$ меняется по гармоническому закону, для $w(x_1,x_2)$ получается уравнение эллиптического типа и принимая $h(x_1,x_2)$ за управляющую функцию выводятся необходимые условия оптимальности. Однако для полноты нужно поставить задачу оптимального управления в общем случае для гиперболического уравнения.

Поэтому в данной работе изучается следующая задача оптимального управления.

Пусть процесс описывается гиперболическим уравнением

$$\frac{\rho(x_1,x_2)}{G}h(x_1,x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(h(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial}{\partial x_2}\left(h(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)= \tag{1}$$
$$=f\big(t,x_1,x_2,u(t,x_1,x_2),h(x_1,x_2)\big),\quad (t,x_1,x_2)\in Q$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,x_1,x_2)=\varphi_0(x_1,x_2),\ \frac{\partial u(0,x_1,x_2)}{\partial t}=\varphi_1(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\Omega \tag{2}$$

$$u|_S=0, \tag{3}$$

где S - боковая поверхность цилиндра $Q=(0,T)\times\Omega$, $\Omega\subset R^2$ - ограниченная область, $0<T<\infty$, $x=(x_1,x_2)$.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(h)=\int_Q f_0\big(t,x,u(t,x),h(x)\big)dxdt \tag{4}$$

при ограничениях (1)-(3).

2. Теорема существования оптимального управления.

За класс допустимых управлений U_{ad} берем множество

$$U_{ad}=\left\{h\in W_2^1(\Omega)\middle|0<\alpha\le h(x)\le\beta,\left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right|\le M \quad п.в. \ в \ \Omega, i=1,2\right\},$$

где α,β - заданные числа.

Пусть выполняются следующие условия:

1. $\varphi_0\in W_2^1(\Omega)$, $\varphi_1\in L^2(\Omega)$, $\rho(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и $\rho(x)\ge\rho_0>0$;
2. $f(t,x,u,h)$, $f_0(t,x,u,h)$ непрерывны по совокупности аргументов в $\overline{Q}\times R\times[\alpha,\beta]$, $f(t,x,u,h)$ по (u,h) удовлетворяет условию Липшица, $f_0(t,x,u,h)$ по (u,h) имеет квадратичный рост, т.е.
3. $\left|f_0(t,x,u,h)\right|\le a_0(t,x)+b_0\left[|u|^2+|h|^2\right]$, где $a_0\in L^1(Q)$, $b_0>0$.

Определение. *Под обобщенным решением задачи (1)-(3) соответствующим допустимому управлению $h(x)$, будем понимать функцию $u(t,x)\in W_{2,0}^1(Q)$, для которой выполняется интегральное тождество:*

$$-\int_Q\frac{\rho(x)}{G}h(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-\int_\Omega\frac{\rho(x)}{G}h(x)\varphi_1(x)\phi(0,x)dx+$$

$$+\int_Q\left[h\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)\right]dxdt=\int_Q f(t,x,u,h)\phi dxdt$$

для любой $\phi(t,x)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, удовлетворяющей условию $\phi(T,x)=0$.

Отметим, что при выполнении вышеприведенных условий 1.-2. задача (1)-(3), при каждом допустимом управлении имеет единственное решение из $W_{2,0}^1(Q)$.

Теорема 1. *При предполагаемых условиях на данные задачи, в поставленной задаче (1)-(4) существует оптимальное управление.*

Доказательство. Пусть $\{h_n\}\in U_{ad}$ - минимизирующая последовательность, т.е.

$$\inf_{h\in U_{ad}}J(h)=\lim_{n\to\infty}J(h_n).$$

Ясно, что

$$\|h_n\|_{W_2^1(\Omega)}\le const \tag{5}$$

Отметим, что для соотвествующих решений задачи (1)-(3) имеет место оценка $\|u_n\|_{W_2^1(Q)}\le c$, где c - некоторая постоянная, не зависящая от n.

Для того, чтобы показать это, можно применить метод Фаедо-Галеркина. Пусть $\{W_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ базис в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Ищем приближенное решение задачи (1)-(3) в следующем виде:

$$u_n^N(t,x)=\sum_{i=1}^{N} C_i^N(t)W_i(x),$$

где $c_1^N(t),c_2^N(t),\dots,c_N^N(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\int_\Omega \frac{\rho(x)}{G}h_n(x)\frac{\partial^2 u_n^N}{\partial t^2}W_j(x)dx+\int_\Omega h_n(x)\frac{\partial u_n^N}{\partial x_j}\frac{\partial W_j(x)}{\partial x_1}dx+\int_\Omega h_n(x)\frac{\partial u_n^N}{\partial x_2}\frac{\partial W_j(x)}{\partial x_2}dx=$$

$$=\int f\left(t,x,u_n^N,h_n\right)W_j(x)dx,\quad j=1,2,\dots,N$$

Отсюда с помощью известной методики из [2] получается следующая оценка:

$$\left\|u_n^N\right\|_{W_2^1(Q)}\le const\ .$$

Тогда выбирая подпоследовательность, можно считать, что в пределе по N

$$\left\|u_n\right\|_{W_2^1(Q)}\le const\ . \qquad (6)$$

В силу неравенств (5), (6) можно считать, что (в случае необходимости, переходя к подпоследовательностям)

$$h_n\to h_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega),$$

$$u_n\to u_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q),$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_i}\to\frac{\partial h_0}{\partial x_i}\quad \text{слабо в}\quad L^2(\Omega)\quad i=1,2,$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial t}\to\frac{\partial h_0}{\partial t}\quad \text{слабо в}\quad L^2(Q),$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial x_i}\to\frac{\partial h_0}{\partial x_i}\quad \text{слабо в}\quad L^2(Q)\quad i=1,2,\quad \text{при}\quad n\to\infty$$

Запишем интегральное тождество для каждого n :

$$-\int_Q \frac{\rho(x)}{G}h_n(x)\frac{\partial u_n}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-\int_Q\frac{\rho}{G}h_n\varphi_1(x)\phi(o,x)dx+$$

$$+\int_Q h_n(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dxdt+\int_Q h_n(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dxdt=$$

$$=\int_Q f\left(t,x,u_n,h_n\right)\phi dxdt,$$

$$\forall\phi\in W_{2,0}^1(Q),\quad \phi(T,x)=0.$$

Тогда при $n\to\infty$ получаем:

$$-\int_Q\frac{\rho(x)}{G}h_0\frac{\partial u_0}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}dxdt-\int_Q\frac{\rho}{G}h_0(x)\varphi_1(x)\phi(0,x)dx+$$

$$+\int_Q h_0\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}dxdt+\int_Q h_0\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dxdt=$$

$$=\int_Q f\left(t,x,u_0,h_0\right)\phi dxdt$$

Здесь мы учли, что оператор $F(u,h)$, порожденный $f(t,x,u,h)$, является непрерывным. Отсюда следует, что $u_0 = u(h_0)$, т.е. $u_0(t,x)$ является решением задачи (1)-(3), соответствующим управлению $h_0(x)$.

Поскольку $f_0(t,x,u,h)$ по (u,h) имеет квадратичный рост, оператор $F_0(u,h)$ порожденный функцией $f_0(t,x,u,h)$ непрерывно действует из $L^2(Q)\times L^2(\Omega)$ в $L^1(Q)$.

Поэтому

$$\inf_{h\in U_{ad}} J(h) = \lim J(h_n) = J(h_0).$$

А это показывает, что $h_0(x)$ доставляет минимум функционалу (4), т.е. является оптимальным управлением. Теорема доказана.

3. Необходимые условия оптимальности в задаче (1)-(4).

В этом случае за класс допустимых управлений U_{ad} берем множество непрерывных функций $h(x)$, которые имеют непрерывные производные по x_1, x_2 и принимают значения из отрезка $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$.

Пусть выполняются следующие условия на данные задачи:

1) $\varphi_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$;

2) $f(t,x,u,h)$ и $f_0(t,x,u,h)$ имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial h}, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial h}, \frac{\partial f_0}{\partial u}, \frac{\partial f_0}{\partial h}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial h}$$

при всех $(t,x)\in\overline{Q}, u\in R, h\in[\alpha,\beta]$, причем $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial h}, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial h}$ ограничены; $\frac{\partial f}{\partial u}$ по u удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\lambda, \frac{2}{3}\le\lambda\le 1, \frac{\partial f_0}{\partial u}$ по u удовлетворяет условию Липшица для всех $(t,x)\in\overline{Q}$, $u\in R$, $h\in[\alpha,\beta]$.

Определение 2. *Пару $(u;h)$ назовем допустимой, если $h(x)$ допустимое управление и $u(t,x)$ является решением задачи (1)-(3) из $W^1_{2,0}(Q)$ соответствующим этому управлению. Для заданной допустимой пары $(u_0;h_0)$ введем сопряженную систему*

$$\frac{\rho(x)h_0(x)}{G} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(h_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(h_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right) = \tag{6}$$

$$= \frac{\partial H(t,x,u_0(t,x),h_0(x),\psi(t,x))}{\partial u},$$

$$\psi(T,x)=0, \quad \frac{\partial\psi(T,x)}{\partial t}=0, \quad \psi|_S = 0, \tag{7}$$

где $H(t,x,u,h,\psi) = \psi f(t,x,u,h) - f_0(t,x,u,h)$ - функция Понтрягина.

При выполнении вышеприведенных условий задача (6)-(7) имеет единственное решение из $W_{2,0}^1(Q)$.

3) Дополнительно предположим, что

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} \in L^2(Q).$$

Определим вариацию допустимого управления $h_0(x)$ в виде

$$h_\varepsilon(x) = h_0(x) + \varepsilon(h(x) - h_0(x)), \text{ где } 0 < \varepsilon < 1,$$

$h(x)$ - произвольное фиксированное допустимое управление.

Решение задачи (1)-(3), соответствующее $h_\varepsilon(\varepsilon)$ обозначим через $u_\varepsilon(t,x)$. Тогда $\Delta u_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ является решением задачи

$$\frac{\rho(x)}{G} h_\varepsilon(x) \frac{\partial^2 \Delta u_\varepsilon(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(h_\varepsilon(x) \frac{\partial \Delta u_\varepsilon(t,x)}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(h_\varepsilon(x) \frac{\partial \Delta u_\varepsilon(t,x)}{\partial x_2} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varepsilon(h(x) - h_0(x)) \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\varepsilon(h(x) - h_0(x)) \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial x_2} \right) -$$

$$- \frac{\rho(x)}{G} \varepsilon(h(x) - h_0(x)) \frac{\partial^2 u_0(t,x)}{\partial t^2} + f(t,x,u_\varepsilon(t,x),h_\varepsilon(x)) -$$

$$- f(t,x,u_0(t,x),h_0(x)), \tag{8}$$

$$\Delta u_\varepsilon(0,x) = 0, \quad \frac{\partial \Delta u_\varepsilon(0,x)}{\partial t} = 0, \quad \Delta u_\varepsilon\big|_S = 0. \tag{9}$$

Рассуждая как в [3] можно доказать, что имеет место

Лемма. *При предполагаемых условиях 1)-3) на данные задачи справедлива оценка:*

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial \Delta u_\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le c \cdot \varepsilon^2, \forall t \in [0,T]. \tag{10}$$

Теперь вычислим первую вариацию функционала $J(h)$.

Используя разложения

$$f(t,x,u_0 + \Delta u_\varepsilon, h_\varepsilon) - f(t,x,u_0,h_\varepsilon) =$$
$$= \frac{\partial f(t,x,u_0,h_\varepsilon)}{\partial u} \Delta u_\varepsilon + \omega_1(u_0;\Delta u_\varepsilon),$$

$$f_0(t,x,u_0 + \Delta u_\varepsilon, h_\varepsilon) - f_0(t,x,u_0,h_\varepsilon) =$$
$$= \frac{\partial f_0(t,x,u_0,h_\varepsilon)}{\partial u} \Delta u_\varepsilon + \omega_0(u_0;\Delta u_\varepsilon)$$

и учитывая, что $\Delta u_\varepsilon(t,x)$, $\psi(t,x)$ являются решениями задач (8), (9) и (6), (7) соответственно, после некоторых преобразований, получаем:

$$\Delta J(h_0) = -\int_Q \Delta_{h_\varepsilon} H(t,x,u_0(t,x)h_0(x),\psi(t,x))dxdt +$$

$$+\int_Q \left[-\frac{\rho(x)}{G}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial x_2}\right] dxdt +$$

$$+\eta(\varepsilon), \tag{11}$$

где

$$\Delta_{h_\varepsilon} H(t,x,u_0(t,x),h_0(x),\psi(t,x)) =$$

$$= H(t,x,u_0(t,x),h_\varepsilon(x),\psi(t,x)) - H(t,x,u_0(t,x),h_0(x),\psi(t,x)),$$

$$\Delta h_\varepsilon = \varepsilon(h - h_0),$$

$$\eta(\varepsilon) = \int_Q \left[\psi(t,x)\cdot\omega_1(u_0;\Delta u_\varepsilon) + \omega_0(u_0;\Delta u_\varepsilon) + \right.$$

$$+\frac{\partial\Delta_{h_\varepsilon} H(t,x,u_0,h_0,\psi)}{\partial u}\cdot\Delta u_\varepsilon + \frac{\rho}{G}\frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial t} -$$

$$\left. -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial x_2}\right] dxdt. \tag{12}$$

Используя оценку (10) при условиях, наложенных на f, f_0 можно показать, что

$$\int_Q \left[\psi(t,x)\omega_1(u_0;\Delta u_\varepsilon) + \omega_0(u_0;\Delta u_\varepsilon)\right] dxdt = o(\varepsilon),$$

$$\int_Q \frac{\partial\Delta_{h_\varepsilon} H(t,x,u_0,h_0,\psi)}{\partial u}\Delta u_\varepsilon dxdt = o(\varepsilon),$$

$$\int_Q \left[\frac{\rho}{G}\frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\Delta h_\varepsilon \frac{\partial\Delta u_\varepsilon}{\partial x_2}\right]\times$$

$$\times dxdt = o(\varepsilon).$$

В силу этих оценок, из (12) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Поэтому, из (11) получается следующая формула для первой вариации функционала $J(h)$:

$$\delta J(h_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta J(h_0)}{\varepsilon} =$$

$$= \int_Q \left[-\frac{\partial H(t,x,u_0,h_0,\psi)}{\partial h} - \right.$$

$$\left. -\frac{\rho}{G}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta u_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta u_0}{\partial x_2}\right](h(x) - h_0(x))dxdt.$$

Таким образом, получаем, что справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1)-3). Если* $(u_0;h_0)$ *- оптимальная пара и* $\psi(t,x)$ *- соответствующее решение задачи (6), (7), то при всех допустимых* $h(x)\in U_{ad}$ *выполняется неравенство* $\delta J(h_0)\geq 0$, *т.е.*

$$\int_Q\left[-\frac{\partial H}{\partial h}-\frac{\rho}{G}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial u_0}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial\Delta u_0}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial\Delta u_0}{\partial x_2}\right](h-h_0)dxdt\geq 0$$

$$\forall h\in U_{ad}.$$

Литература

[1]. Арман Ж-Л.П. *Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций.* Изд-во "Мир", М., 1997.

[2]. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* Изд-во "Наука", М., 1973.

[3]. Кулиев Г.Ф. *Задача управления с управляющими функциями при старших производных и в правых частях управления с функциональными ограничениями.* Труды Азерб. мат. общества, т.2, Баку, 1996, с.122-140.

[4]. Плотников В.И. *Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида.* Изв. АН СССР, сер. матем, 1972, т.36,3, 652-679.