1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.518

ГАСАНОВ Д.Д.

B_n-ПОТЕНЦИАЛ РИССА В ПРОСТРАНСТВАХ $\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^n_+,\varphi\right)$

В пространствах локально суммируемых функций в терминах метрических характеристик $\Omega^{*}_{p,\gamma}$ устанавливается оценка, связывающая характеристику образа и прообраза B_n- потенциала Рисса. Эти оценки интересны и сами по себе и кроме того используются для изучения B_n- потенциала Рисса в весовых L^{γ}_{p}-пространствах.

Пусть R^n n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $|x|=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $R^n_+=\left\{x\in R^n;\, x_n>0\right\}$, $E_\tau=\left\{x\in R^n_+ : |x|<\tau\right\}$, $E^{*}_{\tau}\equiv R^n_+\setminus E_\tau$, $\gamma>0$ при $p\geq 1$, $L^{\gamma}_{p}\left(R^n_+,\varphi\right)$ - пространство, состоящее из функций f, с нормой

$$\|f\|_{L^{\gamma}_{p}\left(R^n_+,\varphi\right)}=\|f\|_{p,\gamma,\varphi}=\left(\int\limits_{R^n_+}|f(x)|^p\varphi(x)x_n^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Такие функциональные пространства (введенные в [1]) приспособлены для работы с обобщенным сдвигом вида

$$T^y f(x)=C_\gamma\int\limits_0^{\pi} f\left(x'-y',\sqrt{x_n^2+y_n^2-2x_ny_n\cos\alpha}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha,$$

где $x=(x',x_n)$, $y=(y',y_n)$, $C_\gamma=\pi^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)}$.

Отметим, что этот сдвиг тесно связан [1] дифференциальным оператором Бесселя

$$B_n=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Определим B_n-потенциал Рисса следующим образом

$$I^{\alpha}_{B}f(x)=\int\limits_{R^n_+}T^y|x|^{\alpha-n-\gamma}f(y)y_n^{\gamma}dy,\quad 0<\alpha<n+\gamma. \tag{1}$$

Определние 1. *Пусть функция* $f\in L^{\gamma}_{p}(E_\tau)$ *при* $\forall\tau>0$. *Положим*

$$\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,\tau)=\left(\int\limits_{E_\tau}|f(x)|^p x_n^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\Omega^*_{p,\gamma}(f,\tau)$ неотрицательны; $\Omega^*_{p,\gamma}(f,\tau)$ не убывает на $(0,\infty)$; $\Omega^*_{p,\gamma}(f,\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$, если $f\in L_p^{\gamma,loc}(R_+^n)$.

Теорема 1. *Пусть* $f\in L_p^\gamma(E_\tau)$, $\forall\tau>0$ *и* $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<n+\gamma$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$.

Тогда при сходимости интеграла

$$\int_1^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt$$

интеграл $I_B^\alpha f$ *сходится абсолютно для почти всех* $x\in R_+^n$ *и справедливо неравенство*

$$\Omega^*_{q,\gamma}\left(I_B^\alpha f,\tau\right)\le C\tau^{\frac{n+\gamma}{q}}\int_\tau^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt,$$

где постоянная C *не зависит от* f.

Доказательство. Представим функцию f в виде суммы f_1+f_2, где

$$f_1(x)=f_2(x)\chi_{E_{2\tau}}(x),\quad f_2(x)=f_2(x)\chi_{E^*_{2\tau}}(x).$$

В силу сходимости интеграла в условии теоремы 1 и монотонности $\Omega^*_{p,\gamma}(f,\tau)$ функция $f\in L_p^\gamma(E_\tau)$ и $f_1\in L_p^\gamma(R_+^n)$, следовательно, $I_B^\alpha f_1$ сходится абсолютно почти всюду. Покажем, что интеграл (1) с плотностью f_2 конечно для всех $x\in E_\tau$. Учитывая, что из $x\in E^*_{2\tau}$, $y\in E_\tau$ следует $T^y|x|\ge|x-y|\ge\frac{1}{2}|y|\ge\tau$. Отсюда

$$\left|I_B^\alpha f_2(x)\right|\le\int_{|y|\ge 2\tau}T^y|x|^{\alpha-n-\gamma}|f(y)|y_n^\gamma dy\le C\tau^{\alpha-n-\gamma}\int_{|y|\ge 2\tau}|f(y)|y_n^\gamma dy.$$

Подбирая $\beta>\frac{n+\gamma}{p'}-1$, найдем

$$\int_{|y|\ge 2\tau}|f(y)|y_n^\gamma dy=\beta\int_{S^+}\xi_n^\gamma d\sigma(\xi)\int_{2\tau}^\infty|f(t\xi)|t^{\alpha-1+\beta}dt\int_t^\infty s^{-\beta-1}ds=$$

$$=\beta\int_{S^+}\xi_n^\gamma d\sigma(\xi)\int_{2\tau}^\infty s^{-\beta-1}ds\int_{2\tau}^s|f(t\xi)|t^{\alpha+\beta-1}dt\le$$

$$\le C\int_{S^+}\xi_n^\gamma d\sigma(\xi)\int_{2\tau}^\infty s^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\left(\int_{2\tau}^s|f(t\xi)|^p t^{n+\gamma-1}dt\right)^{1/p}ds=$$

$$=C\int_{2\tau}^\infty s^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}ds\int_{S^+}\xi_n^\gamma d\sigma(\xi)\left(\int_{2\tau}^s|f(t\xi)|^p t^{n+\gamma-1}dt\right)^{1/p}\le$$

$$\le C\int_{2\tau}^\infty s^{-\frac{n+\gamma}{q}}ds\left(\int_{S^+}\xi_n^\gamma d\sigma(\xi)\int_{2\tau}^s|f(t\xi)|^p t^{n+\gamma-1}dt\right)^{1/p}\le$$

$$\leq C\int_{2\tau}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\left(\int_{E_s}|f(y)|^p y_n^\gamma dy\right)^{1/p} ds \leq C\int_{2\tau}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,s)ds.$$

Значит

$$\int_{|y|\geq 2\tau}|f(y)|y_n^\gamma dy \leq C\int_{2\tau}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt. \tag{3}$$

Следовательно

$$\left|I_B^\alpha f_2(x)\right| \leq C\tau^{\alpha-n-\gamma}\int_{2\tau}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt.$$

Оценим теперь $\Omega^*_{q,\gamma}\left(I_B^\alpha f,2\tau\right)$

$$\Omega^*_{q,\gamma}\left(I_B^\alpha f,2\tau\right)\leq \Omega^*_{q,\gamma}\left(I_B^\alpha f_1,2\tau\right)+\Omega^*_{q,\gamma}\left(I_B^\alpha f_2,2\tau\right)=J_1+J_2.$$

Так как $f_1\in L_p^\gamma\left(R_+^n\right)$. Применяя теорему Соболева для B_n-потенциала Рисса (см.[2]) имеем

$$\Omega^*_{q,\gamma}\left(I_B^\alpha f_1,2\tau\right)\leq\left(\int_{R_+^n}\left|I_B^\alpha f_1(x)\right|^q x_n^\gamma dx\right)^{1/q}\leq$$

$$\leq C\left(\int_{R_+^n}|f_1(x)|^p x_n^\gamma dx\right)^{1/p}=C\Omega^*_{p,\gamma}(f,2\tau),$$

где постоянная C не зависит от f.

Если учесть, что

$$\Omega^*_{p,\gamma}(f,\tau)\leq C\tau^{\frac{n+\gamma}{p}}\int_{\tau}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt,$$

то получим

$$J_1\leq c\tau^{\frac{n+\gamma}{p}}\int_{2\tau}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt. \tag{4}$$

При $|x|\leq\tau$, $|y|\geq 2\tau$ имеет место $T^y|x|\geq|x-y|\geq\frac{1}{2}|y|$ тогда

$$J_2=\left\{\int_{E_\tau}\left|\int_{E_{2\tau}^*}T^y|x|^{\alpha-n-\gamma}f(y)y_n^\gamma dy\right|^q x_n^\gamma dx\right\}^{1/q}\leq$$

$$\leq C\left(\int_{|x|\leq\tau}x_n^\gamma dx\right)^{1/q}\int_{|y|\geq 2\tau}|y|^{\alpha-n-\gamma}|f(y)|y_n^\gamma dy.$$

Перейдя к сферическим координатам, получим

$$\int_{|x|\leq 2\tau}x_n^\gamma dx=\int_{S^+}\int_0^\tau r^{n+\gamma-1}\theta_n^\gamma drd\theta=C\tau^{n+\gamma}.$$

Следовательно, учитывая (3) и последние равенства имеем

$$J_2\leq C\tau^{\frac{n+\gamma}{q}}\int_{\tau}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,s)ds. \tag{5}$$

Из (4) и (5) получим, что

$$\Omega^{*}_{q,\gamma}\left(I^{\alpha}_{B}f,2\tau\right)\leq C\tau^{\frac{n+\gamma}{q}}\int_{\tau}^{\infty}t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,t)dt,$$

где постоянная C, не зависит от f.

Теорема 1 доказана.

Пусть φ положительная измеримая на $(0,\infty)$ функция. Обозначим $\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)$, $1\leq p<\infty$, $1\leq\theta\leq\infty$, множество измеримых в R^{n}_{+} функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)}=\left(\int_{0}^{\infty}\left(\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,t)\right)^{\theta}\varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{\theta}},\quad 1\leq\theta<\infty,$$

$$\|f\|_{\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)}=\sup_{t>0}\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,t)\varphi(t),\quad \theta=\infty.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(t)$, $t\in(0,\infty)$ *положительная функция, суммируемая на каждом промежутке* $(\tau,\infty)\subset(0,\infty)$, $1\leq p<\infty$ *и*

$$\omega(\tau)=\int_{\tau}^{\infty}\varphi(t)dt.$$

Тогда $L^{\gamma}_{p}\left(R^{n}_{+},\omega(|x|)\right)=\Gamma^{*}_{pp,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)$ *и нормы эквивалентны.*

Теорема 3. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<n+\gamma$, $1\leq\theta\leq\theta_{1}<\infty$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n+\gamma}$.

Если

$$\sup_{t>0}\left(\int_{t}^{\infty}\psi(\tau)\tau^{-\frac{(n+\gamma)\theta_{1}}{p'}}d\tau\right)^{\frac{\theta}{\theta_{1}}}\left(\int_{0}^{t}\varphi(\tau)^{1-\theta'}\tau^{\frac{(n+\gamma)\theta'}{p'}-\theta'}d\tau\right)^{\theta-1}<\infty,$$

то

$$\left\|I^{\alpha}_{B}f\right\|_{\Gamma^{*}_{q\theta_{1},\gamma}\left(R^{n}_{+},\psi\right)}\leq C_{2}\|f\|_{\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)}$$

с постоянной C_{2}, *не зависящей от функции* f.

Доказательство. Пусть $f\in\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)$. В силу теоремы 1 и применяя двух весовое неравенство Харди (см.[3], стр.68) имеем

$$\left\|I^{\alpha}_{B}f\right\|_{\Gamma^{*}_{q\theta_{1},\gamma}\left(R^{n}_{+},\psi\right)}=\left\{\int_{0}^{\infty}\left(\Omega^{*}_{q,\gamma}\left(I^{\alpha}_{B}f,\tau\right)\right)^{\theta_{1}}\psi(\tau)d\tau\right\}^{1/\theta_{1}}\leq$$

$$\leq C\left\{\int_{0}^{\infty}\psi(\tau)\tau^{\frac{(n+\gamma)\theta_{1}}{p'}}\left(\int_{\tau}^{\infty}t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,t)dt\right)^{\theta_{1}}d\tau\right\}^{1/\theta_{1}}\leq$$

$$\leq C\left\{\int_{0}^{\infty}t^{-\frac{(n+\gamma)\theta}{q}-\theta}\left(\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,t)\right)^{\theta}\varphi(t)t^{\frac{(n+\gamma)\theta}{q}+\theta}dt\right\}^{1/\theta}=$$

$$=C\left\{\int_{0}^{\infty}\left(\Omega^{*}_{p,\gamma}(f,t)\right)^{\theta}\varphi(t)dt\right\}^{1/\theta}=C\|f\|_{\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^{n}_{+},\varphi\right)}.$$