УДК 517.518

ГУЛИЕВ В.С., МАХАРОВ И.К.

БАНАХОВОЗНАЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА, СОДЕРЖАЩИЕ РАЗНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В работе с помощью разностей дробного порядка определяются пространства Бесова для банаховозначных (E-значных) функций. Доказано, что все пространства Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(R^n,E)$ совпадают при определении их на языке разностей произвольного порядка, как целого так и дробного, с точностью до эквивалентности соответствующих норм.

Пусть N - множество натуральных чисел, $N_0 = N\cup\{0\}$, $n\in N$, $R^n = (-\infty,+\infty)^n$ - n-мерное евклидово пространство, e^i - орт стандартного базиса в R^n, $x=(x_1,\ldots,x_n)=\sum_1^n x_i e^i$, $y\in R^n$, $xy=\sum_1^n x_i y_i$, $|x|=(x\cdot x)^{1/2}$.

Через $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $k=(k_1,\ldots,k_n)$ обозначим мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha|=\sum_1^n\alpha_i$, $(\alpha,k)=\sum_1^n\alpha_i k_i$. Положим $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$, $D^k=D_1^{k_1}\ldots D_n^{k_n}$.

Пусть E - банахово пространство, норму элемента $a\in E$ обозначим через $\|a\|_E$, $p=(p_1,\ldots,p_n), 1\le p_i\le\infty, i=1,\ldots,n$.

Через $L_p(R^n,E)$ будем обозначать пространства сильно измеримых на R^n E-значных функций $f(x)$, для которых конечно норма

$$\|f\|_{L_p(R^n,E)}=\|f\|_{p,E}=\|f\|_{(p_1,\ldots,p_n),E}=$$

$$\left\{\int_R\left[\ldots\left\{\int_R\left(\int_R\|f(x)\|_E^{p_1}dx_1\right)^{p_2/p_1}dx_2\right\}^{p_3/p_2}\ldots\right]^{p_n/p_{n-1}}dx_n\right\}^{1/p_n}.$$

Обозначим через $E_\sigma(f)_{p,E}$ наилучшее приближение функции $f\in L_p(R^n,E)$ целыми E- значными функциями $g(z)$ степени σ ([1]) по норме $L_p(R^n,E)$

$$E_\sigma(f)_{p,E}=\inf_g\|f-g\|_{p,E}.$$

Определение 1. *Разностью порядка $\rho>0$ функции $f(x)$, $x\in R^n$ с шагом $h\in R^1$ назовем выражение ([2])*

$$\Delta_m^\rho(h)f(x)=\exp(\pi\rho i)\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{-1-\rho}f(x+jhe^m),$$

где числа $A_j^{-1-\rho}$ *определяются из соотношения*

$$(1-t)^{\rho}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{-1-\rho}t^j.$$

Определение 2. *Пусть* $h_0>0$, $\rho_i>0$, $k_i\in\mathbf{N}_0$, $\rho_i>l_i-k_i>0$, $i=1,\dots,n$, $\theta\in[1,\infty]$, $l=(l_1,\dots,l_n)\in(0,\infty)^n$, $p\in[1,\infty]^n$. *Пространством* $'B^l_{p,\theta}(R^n,E)$ *называется линейное нормированное пространство* E*- значных функций* f, *определенных на* R^n *с конечной нормой*

$$\|f\|_{'B^l_{p,\theta}(R^n,E)}=\|f\|_{p,E}+\|f\|_{'b^l_{p,\theta}(R^n,E)}=\|f\|_{p,E}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_0^{h_0}\left[\frac{\left\|\Delta_i^{\rho_i}(h)D_i^{k_i}f\right\|_{p,E}}{h^{l_i-k_i}}\right]^{\theta}\frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta}. \qquad (1)$$

Определение 3. *Пусть* $h_0>0$, $\rho>0$, $k\in\mathbf{N}_0$, $\rho>r-k>0$, $p\in[1,\infty]^n$, $\theta\in[1,\infty]$. *Пространством* $'B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$ *называется линейное нормированное пространство* E *- значных функций* f, *определенных на* R^n *с конечной нормой*

$$\|f\|_{'B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)}=\|f\|_{p,E}+\|f\|_{'b^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)}=\|f\|_{p,E}+$$

$$+\sum_{|s|=k}\left\{\int_0^{h_0}\left[\frac{\left\|\Delta^{\rho}(h)D^{s}f\right\|_{p,E}}{h^{r-k}}\right]^{\theta}\frac{dh}{h}\right\}^{1/\theta}. \qquad (2)$$

Если в определении 2 вместо условия $\rho_i>0$, $i=1,\dots,n$, *а в определении 3- вместо условия* $\rho>0$ *считать* $\rho_i\in\mathbf{N}$, $i=1,\dots,n$ *и* $\rho\in\mathbf{N}$, *то получим известные E-значные анизотропные пространства Бесова* $B^l_{p,\theta}(R^n,E), l=(l_1,\dots,l_n)$ *и E-значное изотропное пространство Бесова* $B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для того, чтобы функция* $f\in L_p(R^n,E)$ *принадлежала пространству* $'B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$ *или* $B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$, $r>0$, $1\le p,\theta\le\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы величина* $(a>1)$

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}a^{ir\theta}E_{a^i}(f)_{p,E}\right\}^{1/\theta},\ 1\le\theta\le\infty, \qquad (3)$$

$$\sup_i\left\{a^{ir\theta}E_{a^i}(f)_{p,E}\right\},\ \theta=\infty \qquad (4)$$

была конечна. При этом полунормы $'b^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$, $b^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$ ($'b^{(r)}_{p,\infty}(R^n,E)$, $b^{(r)}_{p,\infty}(R^n,E)$ *при* $\theta=\infty$) *эквивалентны выражению (3) ((4) при* $\theta=\infty$).

Следствие 1. *Пусть* E *банахово пространство,* $p\in[1,\infty]^n$, $\theta\in[1,\infty]$, $r>0$. *Тогда пространства* $B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$, $'B^{(r)}_{p,\theta}(R^n,E)$ *совпадают и соответствующие нормы эквивалентны.*

$$\|f\|_{{}^{*}SB^{\alpha}_{p,\theta}(R_n,E)} \le C\|f\|_{{}^{*}B^{l}_{p,\theta}(R_n,E)},$$

где C *- некоторая постоянная, не зависящая от* f.

Определение 4. *Усреднение функции* $L_p(R^n, E)$ *для любого действительного числа* t *определяется равенством ([3])*

$$f_t = f_t(x) = \frac{1}{|S|}\int_S f(x + t\omega)d\omega, \; f_0(x) = f(x),$$

где S *- единичная сфера в* R^n, $|S|$ *-ее* $(n-1)$*- мерная мера.*

Разность m-го порядка $(m \in N)$ функции $f_t^{(l)}$ по t с шагом h и ее значение в точке $t = 0$ задаются формулами:

$${}^{*}\Delta_h^m f_t^{(l)}(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f_{t+jh}^{(l)}(x),$$

$${}^{*}\mathring{\Delta}_h^m f_t^{(l)}(x) = {}^{*}\Delta_h^m f_t^{(l)}(x)\Big|_{t=0} = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f_{jh}^{(l)}(x),$$

где $f_t^{(l)}(x)$ есть производная от f_t порядка $l\,(l = 1,2,\ldots)$.

Определение 5. *Совокупность функций из* $L_p(R^n, E)$, *для которых конечна полунорма* $(1 \le \theta \le \infty)$

$$\|f\|_{{}^{*}b_{p,\theta}^{r,m,l}(R^n,E)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_R \frac{\sup\limits_t \left\| {}^{*}\Delta_h^m f_t^{(l)}(\cdot) \right\|_{p,E}^{\theta}}{|h|^{(r-l)\theta+1}} dh \right)^{1/\theta}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_h |h|^{(r-l)} \sup\limits_t \left\| {}^{*}\Delta_h^m f_t^{(l)}(\cdot) \right\|_{p,E}, & \text{при } \theta = \infty \end{cases}$$

обозначим через ${}^{*}B_{p,\theta}^{r,m,l}(R^n, E)$. *Аналогично определяется класс* ${}^{*}\mathring{B}_{p,\theta}^{r,m,l}(R^n, E)$ *(*$\sup\limits_t \left\| {}^{*}\Delta_h^m f_t^{(l)}(\cdot) \right\|_{p,E}$ *заменяется на* $\left\| {}^{*}\mathring{\Delta}_h^m f_t^{(l)}(\cdot) \right\|_{p,E}$ *и в обозначении соответствующих полунорм ставится знак* $\circ$*).*

Теорема 4. *Пусть* E *- банахово пространство,* $p \in [1,\infty]^n$, $\theta \in [1,\infty]$, $m > r - l > 0$. *Тогда*

$${}^{*}B_{p,\theta}^{r,m,l}(R^n, E) = {}^{*}\mathring{B}_{p,\theta}^{r,m,0}(R^n, E) = B_{p,\theta}^{r}(R^n, E)$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Если в определении 5 вместо разностей целого порядка ${}^{*}\Delta_h^m f_t^{(l)}(x)$ брать разность дробного порядка $\rho > 0$

$${}^{*}\Delta_h^{\rho} f_t^{(l)}(x) = \exp(\pi\rho i)\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{-1-\rho} f_{t+jh}^{(l)}(x),$$

(соответственно ${}^{*}\mathring{\Delta}_h^{\rho} f_t^{(l)}(x)$), то получится класс функций ${}^{*}B_{p,\theta}^{r,\rho,l}(R^n, E)$ $\left({}^{*}\mathring{B}_{p,\theta}^{r,\rho,l}(R^n, E)\right)$, где $p \in [1,\infty]^n$, $\theta \in [1,\infty]$, $\rho > r - l > 0$.

Аналогично теореме 5 верна

Теорема 5. *Пусть* E- *банахово пространство,* $p \in [1,\infty]^n, \theta \in [1,\infty]$, $\rho > r - l > 0$. *Тогда*

$$^*B^{r,\rho,l}_{p,\theta}\left(R^n, E\right) = {}^*\overset{\circ}{B}{}^{r,\rho,0}_{p,\theta}\left(R^n, E\right) = B^{(r)}_{p,\theta}\left(R^n, E\right)$$

и соответствующие нормы эквивалентны.

Литература

[1]. Гулиев В.С. *Пространства Бесова банаховозначных функций.* Труды Азерб. Матем. Общества, 1996, т.2, с.33-49.

[2]. Бугров Я.С. *Теоремы вложения и сходимости кратных рядов Фурье.* Труды МИАН СССР. 1988, т. 181, с.15-26.

[3]. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М.: Наука, 1975.

[4]. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977, 456с.

[5]. Махаров И.К. *Эквивалентность норм в пространстве Бесова, построенного на основе усреднений, содержащих разности дробного порядка.* Труды ИММ АН Азербайджана, 1997, т.6 (14), с.109-116.

[6]. Махаров И.К. *Теоремы вложения для классов функций, построенных на основе усреднений, содержащих разности дробного порядка.* Труды ИММ АН Азербайджана, 1996, т.5 (13), с.51-59.

[7]. Никольский С.М., Лизоркин П.И. *Классы функций, построенные на основе усреднений.* Сиб.мат.журн. 1988, т.29, №5, с.181-190.