1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.956

КАСУМОВ Н.З.

ОБ ОДНОЙ СТРОГО НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

В данной работе изучается смешанная задача для строго нелинейного параболического уравнения второго порядка. В общем случае такие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+F\left(t,x,u,Du,D^2u\right)=h(t,x),\ (t,x)\in Q, \qquad Q\equiv[0,T]\times\Omega \tag{1.1}$$

где $\Omega\subset R^n$ - оганиченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $F\left(t,x,u,Du,D^2u\right)$ - нелинейный эллиптический оператор с нелинейностью типа N - функций.

Уравнения типа (1.1), в которых нелинейность эллиптического оператора $F\left(t,x,u,Du,D^2u\right)$ имеет степенную форму, были изучены в работах [1,2,3]. Нелинейные уравнения в пространствах Орлича-Соболева ранее были рассмотрены в работах [4,5,6] и др. В работе [6] был исследован случай монотонного оператора. В настоящей статье исследуется уравнение (1.1) с эллиптическим оператором, не удовлетворяющим условию монотонности

$$F\left(t,x,u,Du,D^2u\right)\equiv -f\left(D^2u\right)D^2u+g\left(t,x,u,Du,D^2u\right),$$

где $f\left(D^2u\right)-N$ - функция, а $D\equiv\partial/\partial x$.Такого типа задачи изучены в работе [7].

I. Некоторые определения, интегральные неравенства и теоремы компактности вложения.

Пусть $\Omega\subset R^n$ - ограниченная область, удовлетворяющая условию допустимости, т.е. она удовлетворяет условию конуса и выполняются условия теорем вложения Соболева в случае пространств $W_p^1(\Omega)$. Пусть N - функция $f(u)$ удовлетворяет Δ_2 - или Δ' - условию. Введем еще следующие функции:

$$p(s)=\int_0^{|s|}f(u)du,\quad M(\tau)=\int_0^{|\tau|}p(s)ds, \tag{1.2}$$

а $N(\tau)$ - дополнительная к $M(\tau)$ N - функция.

Через $E_M(Q)$ будем обозначать замыкание в $L_M^*(Q)$ множества ограниченных функций, а через $W^{0,2}E_M(Q)$ - пространство Орлича-Соболева.

Замечание 1.1. Поскольку N - функция $M(\tau)$ удовлетворяет Δ_2 - или Δ' - условию, то, как известно, $E_M(Q)\equiv L_M^*(Q)$ (см.[7]) и $W^{0,2}E_M(Q)\equiv W^{0,2}L_M^*(Q)$.

$$W^{0,2}L_M^*(Q) \equiv \left\{u(t,x) \middle| u(t,x) \in L_M^*(Q), D_i^j u(t,x) \in L_M^*(Q), (i=1,\ldots,n;\ j=1,2)\right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{u(t,x) \middle| \sup_{\rho(\vartheta,N)\le 1} \left| \int_Q \sum_{|\alpha|\le 2} D^\alpha u \cdot \vartheta dx \right| < \infty, \quad \forall \vartheta \in L_N^* \right\}$$

Лемма 1.1. (см.[5]). *Пусть $f(\xi) - N$ - функция, удовлетворяющая Δ_2 - или Δ' -условию, а $P(\xi)$ и $M(\xi)$ - определенные в (1.2) функции. Тогда для $\forall \vartheta(x) \in C^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega M(\vartheta(x))dx \le k\left\{\int_\Omega f(\vartheta)|D_i\vartheta|^2 dx + \int_{\partial\Omega} M(\vartheta)dx'\right\},$$

где $k>0$ - постоянная.

Лемма 1.2. (см.[8]). *Пусть функция $\psi(u_x)$ такова, что $\left(\psi(u_x)\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \le M(u_x)$. Тогда для $\forall u, u_1 \in \overset{\circ}{C}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\int_\Omega f^\beta(u) Du\,\psi(u)dx \le \delta\int_\Omega f(u)(Du)^2 dx + \delta_1 \int_\Omega f(u_1)(Du_1)^2 dx + C(\delta,\delta_1).$$

Здесь $\frac{1}{2}\beta < 1, \quad \delta, \delta_1 > 0, \quad c(\delta,\delta) > 0$ - некоторые числа.

Введем следующий класс функций ([4,5])

$$S_{f,1,2}(\Omega) \equiv \left\{u(x): \Omega \to R^1 \middle| \int_\Omega f(u)|Du|^2 dx + \int_{\partial\Omega} f(u)|u|^2 dx' < \infty\right\}.$$

Замечание 1.2. Из леммы 1.1 вытекает вложение

$$S_{f,1,2}(\Omega) \subset L_M^*(\Omega).$$

Теорема 1.1(см.[5]). *Псевдонормированное множество $S_{f,1,2}(\Omega)$ компактно вложено в пространство $L_M^*(\Omega)$.*

Следствие 1.1. *Если $n=1$, то $S_{f,1,2}(\Omega) \subset C^0(\Omega)$.*

Введем теперь класс функций

$$\overset{\circ}{P}{}^2_{f,1,2}(Q) \equiv \left\{u(t,x) \middle| D^2 u(t,x) \in \mathcal{P}_{f,1,2}(Q)\right\} \cap \left\{u(t,x) \middle| u(0,x)=0, u|_{[0,T]\times\partial\Omega}=0\right\},$$

где

$$\mathcal{P}_{f,1,2}(Q) \equiv \left\{u(t,x) \middle| \int_Q f(u)|Du|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} f(u)|u|^2 dx'dt < \infty; \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L_N^*(Q)} < \infty\right\}$$

Теорема 1.2.(см.[5]). *Пусть $S_{f,1,2}(\Omega)$ - псевдонормированное множество и $S_{f,1,2}(\Omega) \subset L_M^*(\Omega) \subset B$, причем первое вложение компактное. Тогда если N-функция $M_1(\tau)$ такая, что $M_1(\tau) \le M(\tau)$, то вложение $\mathcal{P}_{f,1,2}(Q) \subset L_M^*(Q)$ - компактно.*

II. Пусть $Q \equiv [a,b]\times[0,T] \equiv \Omega\times[0,T]$. В прямоугольнике Q рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f(D^2u)D^2u + g(t,x,u,Du,D^2u) = h(t,x) \tag{2.1}$$

$$u(0,x)=0, \quad u(t,a)=u(t,b)=0, \tag{2.2}$$

где $f(\xi_2)$ и $g(t,x,\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ - некоторые функции, удовлетворяющие следующим условиям:

1^0. $f(\xi_2)$ является N - функций, удовлетворяющей Δ_2 - или Δ' -условию (см.[5,9]);

2^0. функция $g(t,x,\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ и ее первые производные по всем переменным являются функциями Каротеодори, то есть являются измеримыми по $t_n x$ при каждом фиксированном $\xi\in R^3$ и непрерывными по ξ для всех $(t,x)\in Q$;

3^0. существуют функции f_1,f_2,f_3 и постоянные $c_0,c_1>0$, такие, что выполняются неравенства

$$\left|g'_x(t,x,\xi_0,\xi_1,\xi_2)\right|+\sum_{i=0}^{1}\left|g'_{\xi}(t,x,\xi_0,\xi_1,\xi_2)\cdot\xi_{i+1}\right|\le c_0 f_1(\xi_0)\sum_{j=0}^{1}f_{j+2}(\xi_j),$$

$$c_0 f_1(\xi_2)\le f^{\beta}(\xi_2)\le c_1 f_1(\xi_2),\quad (f_i(\xi_0))^{\frac{1}{1-\beta}}\le M(\xi_0),\quad \frac{1}{2}\le\beta<1,\quad i=2,3.$$

4^0. функция $g(t,x,\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ является ограниченным оператором из $W^{0,2}L^*_M(Q)$ в $L^*_N(Q)n$, кроме того, $g'_{\xi}(t,x,\xi_0,\xi_1,\xi_2)\le 0$ и при $u=0$ имеет место $g(t,x,0)=0$.

Решение задачи (2.1)-(2.2) будем понимать в следующем смысле:

Введем следующий класс функций:

$$H(Q)\equiv\left\{u(t,x)\middle| u(t,x)\in W^{0,2}L^*_M(Q)\cap P^2_{f,1,2}(Q)\cap W_2^{0,2}(Q)\right\}.$$

Определение. *Функция* $u(t,x)\in H(Q)$ *называется решением задачи (2.1)-(2.2), если для* $\forall\vartheta(t,x)\in L^*_M(Q)$ *справедливо равенство*

$$\int_Q\frac{\partial u}{\partial t}\vartheta dxdt-\int_Q f(D^2u)D^2u\vartheta dxdt+\int_Q g(t,x,u,Du,D^2u)\vartheta dxdt=\int_Q h(x)\vartheta dxdt$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия 1^0-4^0. Тогда для любой функции* $h(t,x)\in\left(W^{0,2}L^*_N(Q)\cap\overset{\circ}{W}{}^{0,1}L^*_N(Q)\right)\cup\left(W_2^{0,2}(Q)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}(Q)\right)$ *задача (2.1)-(2.2) разрешима в* $H(Q)$.

Доказательство. При доказательстве будет использован метод компактности и эллиптической регуляризации. Доказательство будет проведено методом Галеркина.

Вначале исследуется разрешимость следующей вспомогательной задачи, которая является эллиптической регуляризацией задачи (2.1)-(2.2).

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-f(D^2u_\varepsilon)D^2u_\varepsilon+g(t,x,u_\varepsilon,Du_\varepsilon,D^2u_\varepsilon)=h(t,x), \tag{2.3}$$

$$u_\varepsilon(0,x)=0,\quad u_\varepsilon(t,a)=u_\varepsilon(t,b)=0, \tag{2.4}$$

$$u'_\varepsilon(x,T)=0,\quad \varepsilon>0\text{ - некотрое число.} \tag{2.5}$$

Решение задачи (2.3)-(2.5) понимается в следующем смысле:

Определение. Функция $u(t,x)\in H(Q)$ называется решением задачи (2.3)-(2.5), если для любого $\vartheta(t,x)\in\overset{\circ}{W}{}^{1,0}L^*_M(Q)$ выполняется равенство

$$\varepsilon\int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial \vartheta}{t}dxdt+\int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\vartheta dxdt-\int_Q f\left(D^2u_\varepsilon\right)D^2u_\varepsilon\vartheta dxdt+$$
$$+\int_Q g\left(t,x,u_\varepsilon,Du_\varepsilon,D^2u_\varepsilon\right)\vartheta dxdt=\int_Q h(t,x)\vartheta dxdt \tag{2.6}$$

Пусть $\{w_k(t,x)\}$- полная система функций в $\overset{\circ}{W}{}^{1,0}L_M^*(Q)$. Приближенное решение будем искать как решение следующей задачи

$$D^4u_{\varepsilon m}=\sum_{k=1}^m c_k^m w_k \tag{2.7}$$
$$u_{\varepsilon m}(t,a)=u_{\varepsilon m}(t,b)=0 \tag{2.8}$$
$$D^2u_{\varepsilon m}(t,a)=D^2u_{\varepsilon m}(t,b)=0 \tag{2.9}$$

При этом неизвестные коэффициенты находятся из системы уравнений

$$\varepsilon\int_Q \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t}\frac{\partial \omega_k}{\partial t}dxdt+\int_Q \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t}w_k dxdt-\int_Q f\left(D^2u_{\varepsilon m}\right)D^2u_{\varepsilon m}w_k dxdt+$$
$$+\int_Q g\left(t,x,u_{\varepsilon m},Du_{\varepsilon m},D^2u_{\varepsilon m}\right)w_k dxdt=\int_Q h(t,x)w_k dxdt,\quad k=\overline{1,m} \tag{2.10}$$

А разрешимость этой системы следует из известной леммы “об остром угле”. В дальнейшем мы покажем выполнение условий этой леммы, откуда и получим непосредственно разрешимость системы (2.10).

Утверждение. Всякое приближенное решение уравнения (2.6) удовлетворяет априорным оценкам для каждого заданного $\varepsilon>0$:

$$\varepsilon\left\|\frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t}\right\|_{L_2(Q)}\le c;$$
$$\int_Q f\left(D^2u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3u_{\varepsilon m}\right)^2dxdt\le c \tag{2.11}$$

Доказательство утверждения. Проведем доказательство так, чтобы непосредственно видно было второе условие леммы “об остром угле”.

Умножая (2.10) на c_k^m и муммируя по k, а так же используя (2.7)-(2.9), получим

$$-\varepsilon\int_Q \frac{\partial^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t^2}D^4u_{\varepsilon m}dxdt+\int_Q \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t}D^4u_{\varepsilon m}dxdt-\int_Q f\left(D^2u_{\varepsilon m}\right)D^2u_{\varepsilon m}D^4u_{\varepsilon m}dxdt+$$
$$+\int_Q g\left(t,x,u_{\varepsilon m},Du_{\varepsilon m},D^2u_{\varepsilon m}\right)D^4u_{\varepsilon m}dxdt=\int_Q h(t,x)D^4u_{\varepsilon m}dxdt.$$

Вначале интегрируя по частям по x и учитывая граничные условия, а затем интегрируя по t и учитывая условия по t, имеем

$$J\equiv\varepsilon\int_Q\left(\frac{\partial D^2u_{\varepsilon m}}{\partial t}\right)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(D^2u_{\varepsilon m}(x,T)\right)^2dx+\int_Q f'\left(D^2u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3u_{\varepsilon m}\right)^2D^2u_{\varepsilon m}dxdt+$$
$$+\int_Q f\left(D^2u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3u_{\varepsilon m}\right)^2dxdt-\int_Q g'_{\xi_2}\left(D^3u_{\varepsilon m}\right)^2dxdt=\int_Q D^2h\cdot D^2u_{\varepsilon m}dxdt+$$
$$+\int_Q D^3u_{\varepsilon m}\left(g'_x+g'_{\xi_0}Du_{\varepsilon m}+g'_{\xi_1}D^2u_{\varepsilon m}\right)dxdt$$

Откуда, используя условие 3^0, лемму 1.2, (2.8), (2.9) и оценивая в правой части имеем:

$$J \le \left| \int_Q D^2 h \cdot D^2 u_{\varepsilon m} dxdt \right| + \delta \int_Q f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 dxdt + c$$

Теперь, используя выражение для J, выбирая достаточно малым $\delta < 1$, окончательно получаем следующее энергетическое неравенство

$$\varepsilon \int_Q \left(\frac{\partial D^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t^2} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(D^2 u_{\varepsilon m}(x,T)\right)^2 dx + \int_Q f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 D^2 u_{\varepsilon m} dxdt -$$
$$- \int_Q g'_{\xi_2}\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 dxdt \le \left| \int_Q D^2 h \cdot D^2 u_{\varepsilon m} dxdt \right| + c \qquad (2.12)$$

(Здесь учитывается свойство N - функций о том, что $f'(\xi)\xi$) эквивалентно $f(\xi)$).

Таким образом, на самом деле также получаем, что

$$\int_Q \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t^2} + \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t} - f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right) D^2 u_{\varepsilon m} + g\left(t,x,u_{\varepsilon m}, Du_{\varepsilon m}, D^2 u_{\varepsilon m}\right) \right) \times$$
$$\times D^4 u_{\varepsilon m} dxdt \ge \varepsilon \int_Q \left(\frac{\partial D^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(D^2 u_{\varepsilon m}(T,x)\right)^2 dx + \int_Q f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right) D^2 u_{\varepsilon m} dxdt -$$
$$- \int_Q g'_{\xi_2}\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 dxdt - c \qquad (2.13)$$

Заметим, что по условию $g'_{\xi_2} \le 0$.

Оценим правую часть

$$\left| \int_Q D^2 h \cdot D^2 u_{\varepsilon m} dxdt \right| \le \int_Q \left|D^2 u_{\varepsilon m}\right| \left|D^2 h\right| dxdt \le \varepsilon \int_Q M\left(\left|D^2 u_{\varepsilon m}\right|\right) dxdt +$$
$$+ \int_Q N\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(D^2 h\right) \right) dxdt \le \varepsilon \int_Q M\left(\left|D^2 u_{\varepsilon m}\right|\right) dxdt + \left\| \frac{1}{\varepsilon} h(t,x) \right\|_{W^{0,2} L_N^*(Q)}$$

Замечание. Поскольку

$$\int_Q h(t,x) D^4 u_{\varepsilon m} dxdt \le \delta \left\| D^2 u_{\varepsilon m} \right\|^2_{L_2(Q)} + c(\delta) \left\| D^2 h(t,x) \right\|^2_{L_2(Q)},$$

то при получении априорных оценок можно было бы использовать условие о том, что $h(t,x)$ содержится в $W_2^{0,2}(Q)$. Отсюда, используя теорему вложения 1.1. и выбирая $\delta > 0$ достаточно малым, получим, что

$$\left| \int_Q D^2 h \cdot D^2 u_{\varepsilon m} dxdt \right| \le \delta \int_Q f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 dxdt + c(\delta) \|h\|_{W^{0,2} L_N^*(Q)} \qquad (2.14)$$

Тогда из (2.12) непосредственно вытекает следующее неравенство

$$\varepsilon \int_Q \left(\frac{\partial D^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t} \right)^2 dxdt + \frac{1}{2} \int_\Omega \left(D^2 u_{\varepsilon m}(x,T)\right)^2 dx + \int_Q f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right)\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 dxdt -$$
$$- \int_Q g'_{\xi_2}\left(D^3 u_{\varepsilon m}\right)^2 dxdt \le c,$$

где $c \equiv c\left(c_0, \beta, \|h\|_{W^{0,2}L_N^*(Q)}\right)$. Отсюда и вытекает наше утверждение, то есть получаем априорные оценки (2.11).

Кроме того, так как из (2.13) получаем "коэрцитивность" порожденного задачей оператора, то отсюда вытекает выполнение условия леммы "об остром угле". Так как по предположению все слагаемые в системе уравнений (2.10) являются непрерывными ,а из (2.13) вытекает, что для всякого $h(t,x) \in W^{0,2} L_N^*(Q)$ существует такой шар радиуса $R(\|h\|)$, что на границе этого шара выполняется неравенство

$$\int_Q \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_{\varepsilon m}}{\partial t^2} + \frac{\partial u_{\varepsilon m}}{\partial t} - f\left(D^2 u_{\varepsilon m}\right) D^2 u_{\varepsilon m} + g\left(t, x, u_{\varepsilon m}, Du_{\varepsilon m}, D^2 u_{\varepsilon m}\right)\right) D^4 u_{\varepsilon m} dxdt -$$
$$- \int_Q h(t,x) D^4 u_{\varepsilon m} dxdt \geq 0$$

Здесь учитываем (2.7)-(2.9).

Таким образом, получили разрешимость системы уравнений для всякого m, а также существование априорной оценки из утверждения. Другими словами, получили последовательность решений $\{u_{\varepsilon m}(t,x)\}$, которые равномерно по m для каждого фиксированного ε удовлетворяют априорной оценке (2.11). То есть $\{u_{\varepsilon m}(t,x)\}$ является ограниченным множеством в пространстве $P_{f,1,2}^2(Q)$.

Используя теперь теорему компактности вложения (см.[8]) получим, что существует подпоследовательность $\{u_{\varepsilon m_1}\} \subseteq \{u_{\varepsilon m}\}$, удовлетворяющая следующим соотношениям

$$u_{\varepsilon m_1}(t,x) \Rightarrow u_\varepsilon(t,x) \;\text{ в }\; W^{0,2} L_M^*(Q),$$
$$f\left(D^2 u_{\varepsilon m_1}\right) D^2 u_{\varepsilon m_1} \Rightarrow f\left(D^2 u_\varepsilon\right) D^2 u_\varepsilon \;\text{ в }\; L_N^*(Q) \text{ при } m_1 \to \infty,$$

В силу непрерывности функции g по всем переменным ξ и так как $g: W^{0,2} L_M^*(Q) \to L_N^*(Q)$, получаем, что при $m \to \infty$

$$\varphi\left(t, x, u_{\varepsilon m_1}, Du_{\varepsilon m_1}, D^2 u_{\varepsilon m_1}\right) \Rightarrow \varphi\left(t, x, u, Du, D^2 u\right) \;\text{ в }\; L_N^*(Q).$$

Тогда переходя к пределу в (2.10) при $m_1 \to \infty$ получим

$$\varepsilon \int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial w_k}{\partial t} dxdt + \int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} w_k dxdt - \int_Q f\left(D^2 u_\varepsilon\right) D^2 u_\varepsilon w_k dxdt +$$
$$+ \int_Q g\left(t, x, u_\varepsilon, Du_\varepsilon, D^2 u_\varepsilon\right) w_k dxdt = \int_Q h(t,x) w_k dxdt \tag{2.15}$$

Далее, поскольку $\{w_k(t,x)\}$ является полной системой в $W^{1,0} L_M^*(Q)$, то замыкая получим, что для $\forall \vartheta \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0} L_M^*(Q)$ имеет место равенство (2.6).

Таким образом, для получения разрешимости вспомогательной задачи остается показать выполнение условия $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0$. Из равенства (2.6), переписывая его в эквивалентном виде, получим

$$\varepsilon \int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dxdt = \int_Q \left(h - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + f\left(D^2 u_\varepsilon\right) D^2 u_\varepsilon - g \right) dxdt \equiv \int_Q F(t,x) \vartheta dxdt.$$

Ясно, что для $\forall \vartheta(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,0} L^*_M(Q)$ это равенство можно переписать в следующем виде

$$-\varepsilon \int_Q \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \vartheta dx dt = \int_Q F(t,x) \vartheta dx dt \tag{2.16}$$

Все слагаемые в определении $F(t,x)$, как уже было показано выше, содержится в $L^*_N(Q)$, следовательно $F(t,x) \in L^*_N(Q)$. Тогда, замыкая $\overset{\circ}{W}{}^{1,0} L^*_M(Q)$ в $L^*_M(Q)$, получим, что (2.16) имеет место для $\forall \vartheta(t,x) \in L^*_M(Q)$.

Отсюда, используя общий вид линейного функционала над пространством $L^*_M(Q)$ получаем, что имеет мсто

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \in L^*_N(Q).$$

Следовательно, след $\left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|_{t=T}$ определен. Причем, как показывают предыдущие рассуждения, равен нулю.

Далее, учитывая выражение для $F(t,x)$, (2.16) перепишем в следующем виде

$$-\varepsilon \int_Q \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} \vartheta dx dt + \int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \vartheta dx dt = \int_Q \left(h + f\left(D^2 u_\varepsilon\right) D^2 u_\varepsilon - g\right) \vartheta dx dt \equiv \int_Q f_\varepsilon(t) \vartheta dx dt,$$

где $f_\varepsilon(t) \in L^*_N(Q)$ и пробегает ограниченное множество в $L^*_N(Q)$ при $\varepsilon \to 0$ в силу равномерности полученных априорных оценок для слагаемых, содержащихся в $f_\varepsilon(t)$. Теперь, рассуждая точно так же, как в [5], [7] и учитывая условия при $t = T$, получаем, что u_ε является решением задачи

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = f_\varepsilon(t),$$

$$\left.u_\varepsilon\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right|_{t=T} = 0.$$

$$u \left\| \frac{\partial u_\varepsilon(\theta)}{\partial t} \right\|_{L^*_N(Q)} \le k \text{ равномерно по } \varepsilon.$$

Следовательно, u_ε содержится в ограниченном множестве пространства $P^2_{f,1,2}(Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теперь перейдем к пределу в (15) при $\varepsilon \to 0$.

$$\varepsilon \left| \int_Q \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx dt \right| \le \varepsilon \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^*_N(Q)} \left\| \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right\|_{L^*_M(Q)} \le k\sqrt{\varepsilon} \|\vartheta\|_{W^{1,0} L^*_M(Q)}.$$

Отсюда следует, что первое слагаемое в левой части равенства (2.15) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Из этого и из того, что все априорные оценки равномерны по $\varepsilon \ge 0$, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $u_\varepsilon(t,x) \Rightarrow u(t,x)$ в $W^{0,2} L^*_M(Q)$ и $U(t,x) \in H(Q)$. А следовательно, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (2.15) получаем, что имеет место

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t}\vartheta dxdt - \int_Q f(D^2u)D^2u\vartheta dxdt + \int_Q g(t,x,u,Du,D^2u)\vartheta dxdt = \int_Q h\vartheta dxdt$$

для всех функций $\vartheta(t,x)\in L_M^*(Q)$, что и требовалось доказать.

Теорема разрешимости полностью доказана. Более того, в действительности доказано существование более гладкого решения.

Теорема 2.2. *Пусть $u(t,x)\in H(Q)$ - решение задачи (1.1)-(1.2). Тогда $u(t,x)$ содержится в некотором классе Гёльдера по переменной t, то есть $u(t,x)\in C^{\alpha,0}(Q)$ $(\alpha>0)$ в условиях теоермы 2.1. (т.е. всякое решение задачи (2.1)-(2.2) из класса $H(Q)$ содержится в пространстве $C^{\alpha,0}(Q)$).*

Доказательство. Действительно, предположим, что $u(t,x)\in H(Q)$ является решением задачи (2.1)-(2.2) и выполняется условие теоремы, то есть $h(t,x)\in$ $\in\left(W^{0,2}L_N^*(Q)\cap\overset{\circ}{W}{}^{0,1}L_N^*(Q)\right)\cup\left(W_2^{0,2}L_N^*(Q)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^{0,1}L_N^*(Q)\right)$, а $g(t,x,u,Du,D^2u)$ определяется условиями 2^0-3^0-4^0.

Тогда, поскольку имеем, что $f(D^2u_m)D^3u_m\in L_N^*(Q)$ и является ограниченным множеством в нем, получим

$$f(D^2u_m)D^3u_m\to\chi \text{ слабо в } L_N^*(Q).$$

Поскольку $\{u_m\}$ содержится в ограниченном множестве $P_{f1,2}^2(Q)$, а $P_{f1,2}^2(Q)$ в силу теоремы компактности компактно вложено в $W^{0,2}L_M^*(Q)$, следовательно существует подпоследовательность $\{u_{m_i}\}$ из $\{u_m\}$, такая что $u_{m_i}\Rightarrow u$ в $W_M^{0,2}(Q)$. Отсюда, как было показано при доказательстве теоремы 2.1, $p(D^2u_{m_i})\Rightarrow p(D^2u)$. Используя это в выражении $\int_\Omega D(p(D^2u))\vartheta dxdt$, где $\forall\vartheta\in\overset{\circ}{W}{}_N^{0,1}(Q)$, получаем, что $\chi\equiv f(D^2u)D^3u$.

Следовательно, $u(t,x)$ содержится в $P_{f1,2}^2(Q)$, а $P_{f1,2}^2\subset L_N^*(0,T;W_N^1(a,b))$. Откуда в силу теоремы вложения получаем

$$p(D^2u)\in L_N^*(0,T;C^0(a,b)).$$

Далее, в силу обратности $p(D^2u)$ имеем $D^2u\in L_M^*(0,T;C^0(a,b))$. Отсюда в силу гладкости $g(t,x,u,Du,D^2u)$ и условий, наложенных на $g(t,x,u,Du,D^2u)$, получаем: $g(t,x,u,Du,D^2u)\in L_N^*(0,T;C^0(a,b))$.

Очевидно, что $h(t,x)$ принадлежит $L_N^*(0,T;C^1(a,b))$.

Из того, что $u(t,x)$ является решением уравнения (2.1) получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t}=h(t,x)+f(D^2u)D_2u-g(t,x,u,Du,D^2u), \qquad (2.17)$$

Таким образом, мы показываем, что правая часть (2.17) содержится в $L_N^*\left(0,T;C^0(a,b)\right)$. Следовательно, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L_N^*\left(0,T;C^0(a,b)\right)$. Тогда, как нетрудно видеть, $u(t,x)\in C^{\alpha}\left(0,T;C^0(a,b)\right)$, где α определяется из теоремы вложения Соболева.

Теорема доказана.

Литература

[1]. Lions J.L. Bul. Soc. Math. France, 93? 1965? P.155-175.

[2]. Солтанов К.Н. *О разрешимости некоторых вырождающихся нелинейных уравнений.* Тр. МЭИ, 201, 1974, с.164-171.

[3]. Касумов Н.З. *О разрешимости одной нелинейной параболической задачи.* Известия АН Азерб., №2, 1987, с.36-41.

[4]. Солтанов К.Н. *Нелинейные параболические задачи в пространствах типа Соболева-Орлича.* Тр. ИММ АН Азерб ССР, вып.II, 1981, с.107-115.

[5]. Солтанов К.Н. *О разрешимости некоторых параболических задач с нелинейностями, растущими быстрее степенной.* Матем.заметки, т.31, вып.6, 1982, с.909-923.

[6]. Donaldson T.K. J.Diff.Equat., 10, 3, 1971, p.507-528.

[7]. Дубинский Ю.А. *Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях.* Матем.сб. 67(109), 4, 1965, с.609-642.

[8]. Солтанов К.Н. *О разрешимости некоторых вырождающихся нелинейных параболических задач в пространствах Соболева и Орлича-Соболева.* Канд.дис., М., 1975.

[9]. Красносельский М.А., Руницкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* М., 1958.