УДК 513.88

КХУАТ В.Н., МАМЕДОВ Я.Д.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

В этой работе сначала исследуется решение специальной системы операторных уравнений, а потом, пользуясь полученным результатом, изучается решение краевой задачи для дифференциального уравнения первого порядка с параметром.

1. Через B_1, B_2 обозначчим вещественные банаховые пространства, а через

$$S_1 = \left\{ x \in B_1, \left\| x - x_0 \right\| \le r_1 \right\}, \quad S_1 = \left\{ \lambda \in B_2, \left\| \lambda - \lambda_0 \right\| \le r_2 \right\}$$

шары в них.

Пусть нелинейные операторы $A(x,\lambda)$ и $P(x,\lambda)$ определены в $S_1 \times S_2$. Рассмотрим систему нелинейных операторных уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= A(x,\lambda), \\ P(x,\lambda) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

Допустим, что оператор $A(x,\lambda)$ в $S_1 \times S_2$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\| A\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right) - A(x,\lambda) \right\| \le \alpha_1 \left\| \bar{x} - x \right\| + \beta \left\| \bar{\lambda} - \lambda \right\| \left(0 < \alpha_1 < 1, \beta > 0\right) \tag{2}$$

и

$$\left\| A(x_0,\lambda_0) - x_0 \right\| \le \beta v_0 - (1-\alpha_1) u_0 \left(0 < u_0 < r_1, 0 < v_0 < r_2\right). \tag{3}$$

Предположим, что оператор $P(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируем по λ, существует

$$\Gamma_0 = \left[\frac{\partial P(x_0,\lambda_0)}{\partial \lambda} \right]^{-1}$$

и

$$\left\| \Gamma_0 \left[P(\bar{x},\lambda) - P(x,\lambda) \right] \right\| \le \alpha_2 \left\| \bar{x} - x \right\| \left(x, \bar{x} \in S_1, \lambda \in S_2\right) \tag{4}$$

$$\left\| \Gamma_0 \left[\frac{\partial P(x,\lambda_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P(x_0,\lambda_0)}{\partial \lambda} \right] \right\| \le \alpha_3 r_1 \ (x \in S) \tag{5}$$

Через $\psi(v)(v_0 \le v \le r_2)$ обозначим дважды дифференцируемую функцию, такую, что

$$c_0 = -\frac{1}{\psi'(v_0)} > 0 .$$

Пусть, наконец,

$$\left\| \Gamma_0 P(x_0,\lambda_0) \right\| \le c_0 \psi(v_0) + \alpha_2 u_0 + \alpha_3 r_1 v_0 \tag{6}$$

$$\left\|\Gamma_0 \frac{\partial^2 P(x,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\| \le c_0\psi''(v_0)\left(\|\lambda-\lambda_0\| \le v - v_0 \le r_2\right) \tag{7}$$

Для системы (1) последовательные приближения построим равенствами (ср. [1]-[3])

$$\left.\begin{array}{l} x_n = A(x_{n-1},\lambda_{n-1}), \\ \lambda_n = \lambda_{n-1} - \Gamma_0 P(x_{n-1},\lambda_{n-1}) \quad (n=1,2,\ldots) \end{array}\right\} \tag{8}$$

Рассмотрим и вспомогательную систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} u = \alpha_1 u + \beta v, \\ v = \alpha_2 u + (1+\alpha_3 r_1)v + c_0\psi(v) \end{array}\right\} \tag{9}$$

и для этой системы построим последовательные приближения

$$\left.\begin{array}{l} u_n = \alpha u_{n-1} + \beta v_{n-1}, \\ v_n = \alpha_2 u_{n-1} + (1+\alpha_3 r_1)v_{n-1} + c_0\psi(v_{n-1})(n=1,2,\ldots) \end{array}\right\} \tag{10}$$

Допустим, что система уравнений (9) имеет хотя бы одно решение $(u^*,v^*) \in [u_0,r_1]\times[v_0,r_2]$.

Из условий (3) и (6) соответственно следует, что

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 u_0 + \beta v_0 \ge u_0, \\ \alpha_2 u_0 + (\alpha_3 r_1 + 1)v_0 + c_0\psi(v_0) \ge v_0 \end{array}\right\}$$

Отсюда следует, что

$$u_0 \le u_1, v_0 \le v_1 .$$

Применяя метод математической индукции, из (10) легко получается, что

$$u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_{n-1} \le u_n \le \ldots,$$
$$v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_{n-1} \le v_n \le \ldots$$

Также, учитывая предположение

$$u_0 \le u^*,\ v_0 \le v^*$$

и применяя снова метод математической индукции, из (10) получаем, что

$$u_n \le u^*,\ v_n \le v^* \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Итак,

$$u_0 \le u_1 \le \ldots \le u_n \le \ldots \le u^* \le r_1,$$
$$v_0 \le v_1 \le \ldots \le v_n \le \ldots \le v^* \le r_2 .$$

Из этих неравенств следует, что $\{u_n\},\{v_n\}$ сходятся. Переходя к пределу в (10), получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u^*, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = v^* .$$

Теперь перейдем к исследованию приближений (8).

Сначала докажем, что

$$\left.\begin{array}{l} \|x_{n+1}-x_n\| \le u_{n+1}-u_n, \quad x_n \in S_1 \\ \|\lambda_{n+1}-\lambda_n\| \le v_{n+1}-v_n, \quad \lambda_n \in S_2 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Из (8) имеем

$$\|x_1 - x_0\| = \|A(x_0, \lambda_0) - x_0\| \le \beta v_0 - (1-\alpha_1)u_0 = u_1 - u_0 \le r_1,$$
$$\|\lambda_1 - \lambda_0\| = \|\Gamma_0 P(x_0, \lambda_0) - x_0\| \le \alpha_2 u_0 + \alpha_3 r_1 v_0 + c_0\psi(v_0) = v_1 - v_0 \le r_2.$$

Это означает, что (11) верно при $n = 0$. Предположим, что

$$\|x_k - x_{k-1}\| \le u_k - u_{k-1},\ x_k \in S_1, k = 1,2,\dots,n,$$
$$\|\lambda_k - \lambda_{k-1}\| \le v_k - v_{k-1},\ \lambda_k \in S_2\ (k = 1,2,\dots,n).$$

Тогда из (8)

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_n\| \le \alpha_1\|x_n - x_{n-1}\| + \beta\|\lambda_n - \lambda_{n-1}\| \le \\
&\le \alpha_1(u_n - u_{n-1}) + \beta(v_n - v_{n-1}) = \\
&= (\alpha_1 u_n + \beta v_n) - (\alpha_1 u_{n-1} + \beta v_{n-1}) = u_{n+1} - u_n, \\
&\|x_{n+1} - x_0\| \le \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_{n-1}\| + \dots + \|x_1 - x_0\| \le \\
&\le (u_{n+1} - u_n) + (u_n - u_{n-1}) + \dots + (u_1 - u_0) = u_{n+1} - u_0 \le r_1.
\end{aligned}$$

Первая часть (11) доказана.

Также из (8) имеем

$$\|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| \le \alpha_1\|x_n - x_{n-1}\| + \left\| \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \left[I - \Gamma_0 \frac{\partial P(x_{n-1}, \lambda)}{\partial \lambda} \right] d\lambda \right\| \tag{12}$$

Очевидно, что

$$I - \Gamma_0 \frac{\partial P(x_{n-1}, \lambda)}{\partial \lambda} = \Gamma_0 \left[\frac{\partial P(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P(x_{n-1}, \lambda)}{\partial \lambda} \right] =$$
$$= \Gamma_0 \left[\frac{\partial P(x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial P(x_{n-1}, \lambda)}{\partial \lambda} \right] + \int_{\lambda_0}^{\lambda} \Gamma_0 \frac{\partial^2 P(x_{n-1}, \bar{\lambda})}{\partial \lambda^2} d\lambda.$$

При $\|\lambda - \lambda_0\| \le v - v_0$ имеем

$$\left\| I - \Gamma_0 \frac{\partial P(x_{n-1}, \lambda)}{\partial \lambda} \right\| \le \alpha_3\|x_{n-1} - x\| + \int_{v_0}^{v} c_0\psi''(t)dt \le$$
$$\le \alpha_3 r_1 + c_0\psi'(v) - c_0\psi'(v_0) = 1 + \alpha_3 r_1 + c_0\psi'(v).$$

Учитывая это в (12), получим

$$\begin{aligned}
&\|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| \le \alpha_2(u_n - u_{n-1}) + (1 + \alpha_3 r_1)(v_n - v_{n-1}) + \\
&+ c_0\psi'(v_n) - c_0\psi'(v_{n-1}) = [\alpha_2 u_n + (1 + \alpha_3 r_1)v_n + c_0\psi(v_n)] - \\
&- [\alpha_2 u_{n-1} + (1 + \alpha_3 r_1)v_{n-1} + c_0\psi'(v_{n-1})] = v_{n+1} - v_n, \\
&\|\lambda_{n+1} - \lambda_0\| \le \|\lambda_{n+1} - \lambda_n\| + \|\lambda_n - \lambda_{n-1}\| + \dots + \|\lambda_1 - \lambda_0\| \le \\
&\le (v_{n+1} - v_n) + \dots + (v_1 - v_0) = v_{n+1} - v_0 \le r_2
\end{aligned}$$

Вторая часть (11) также доказана.

Итак, мы доказали справедливость (11).

Из (11) легко получить, что

$$\left.\begin{aligned}
\|x_{n+p} - x_n\| &\le u_{n+p} - u_n, \\
\|\lambda_{n+p} - \lambda_n\| &\le v_{n+p} - v_n.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Учитывая, что $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся, тогда из (13) получаем, что сходятся и $\{x_n\}$ и $\{\lambda_n\}$.

Переходя к пределу при $p \to \infty$, в (13), получаем оценки скорости сходимости этих приближений к решению системы (1):

$$\left.\begin{aligned} \|x_n - x\| &\le u^* - u_n, \\ \|\lambda_n - \lambda\| &\le v^* - v_n. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть нелинейные операторы $A(x,\lambda)$ и $P(x,\lambda)$ определены в $S_1 \times S_2$ и удовлетворяет условиям (1), (3). Пусть существует Γ_0 и выполнены условия (4), (5). Пусть $\psi(v)(0 < v_0 \le v \le r_2)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция, существует c_0 и система (9) имеет хотя бы одно решение в $[u_0, r_1] \times [v_0, r_2]$.*

Пусть, наконец, выполнены условия (6), (7).

Тогда система (1) имеет хотя бы одно решение в $S_1 \times S_2$, это решение является пределом приближений, определенных из (8). Причем, скорость сходимости определяется с помощью неравенства (14).

2. Рассмотрим один частный случай теоремы 1, который удобен для применения.

Теорема 2. *Пусть нелинейные операторы $A(x,\lambda)$ и $P(x,\lambda)$ определены в $S_1 \times S_2$ и удовлетворяют условиям (2), (3). Пусть существует Γ_0 и выполнены условия (4), (5). Пусть, далее*

$$\|\Gamma_0 P(x_0, \lambda_0)\| \le \eta,$$
$$\left\|\Gamma_0 \frac{\partial^2 P(x,\lambda)}{\lambda^2}\right\| \le k(x \in S_1, \lambda \in S_2).$$

Пусть, наконец,

$$\left.\begin{aligned} &k\eta^* \le A^2,\ \eta^* = kv_0^2 + 2(v_0 + \eta),\ \ A = 1 + kv_0 - \frac{\alpha_2 \beta}{1-\alpha_1} - \alpha_3 r_1, \\ &0 < v_0 \le \frac{1}{k}\left(A - \sqrt{A^2 - k\eta^*}\right) \le r_2, \\ &0 < u_0 \le \beta/_{1-\alpha_1} v_0 \le r_1 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Тогда система (1) имеет хотя бы одно решение и это решение является пределом приближений (8). Скорость сходимости определяется формулой

$$\begin{aligned} \|x_0 - x\| &\le q^n \max(u^* - u_0, v^* - v_0), \\ \|\lambda_n - \lambda\| &\le q^n \max(u^* - u_0, v^* - v_0), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$q = \max\{\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \gamma\}, \quad \gamma = \alpha_3 r_1 + A - \sqrt{A^2 - k\eta^*}.$$

Доказательство. Легко заметить, что, если положить

$$\psi(v) = k(v - v_0)^2 - 2(v - v_0) + 2\eta,$$

то все условия теоремы 1 будут выполняться, следовательно, система (1) имеет хотя бы одно решение в $S_1 \times S_2$ и это решение является пределом приближений (8).

Покажем справедливость (16).

Из (9) и (10) имеем

$$u^* - u_{n+1} = \alpha_1(u^* - u_n) + \beta(v^* - v_n),$$
$$v^* - v_{n+1} = \alpha_2(u^* - u_n) + \left[1 + \alpha_3 r_1 + c_0 \psi'(\tilde{v}_{n-1})\right](v^* - v_n),$$

где

$$\tilde{v}_{n-1} = \frac{v_n^* + v_{n-1}}{2} \le v^*.$$

Если ввести обозначения

$$\varepsilon_n = u^* - u_n, \quad \delta_n = v^* - v_n,$$

то отсюда имеем

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{n+1} = \alpha_1 \varepsilon_n + \beta \delta_n, \\ \delta_{n-1} \le \alpha_2 \varepsilon_n + \gamma \delta_n, \end{array}\right\}$$

где

$$\gamma = \alpha_3 r_1 + k v^* = \alpha_3 r_1 + A - \sqrt{A^2 - k - \eta^*}.$$

Отсюда легко получить, что

$$\varepsilon_{n+1} \le \left[\max\{\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \gamma\}\right]^{n+1} \max\{\varepsilon_0, \delta_0\},$$
$$\delta_{n+1} \le \left[\max\{\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \gamma\}\right]^{n+1} \max\{\varepsilon_0, \delta_0\}.$$

Следовательно, (14) верны.

3.Вышедоказанную теорему можно применить к решению различных проблем для дифференциальных (как обыкновенных, так и с частными производными) интегральных, интегро-дифференциальных уравнений.

Приведем лишь один из таких примеров.

Рассмотрим следующую краевую задачу.

Требуется найти решение $x(t) \in S(0 \le t \le T)$ задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \; x(0) = x_0 \tag{17}$$

и такое значение параметра $\lambda \in S_2$, для которого выполняется краевое условие

$$x(T) = x_T. \tag{18}$$

Очевидно, что задача (17), (18) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A(t,x) \equiv x_0 + \int\limits_0^t f[s, x(s)]ds, \\ P(x,\lambda) \equiv x_T - x_0 - \int\limits_0^T f[s, x(s), \lambda]ds = 0 \end{array}\right\} \tag{19}$$

Предположим, что выполнены следующие условия

I. $$\left\| f(t, \bar{x}, \bar{\lambda}) - f(t, x, \lambda) \right\| \le \frac{\alpha_1}{T}\|\bar{x} - x\| + \frac{\beta}{T}\|\bar{\lambda} - \lambda\|, \quad (0 < \alpha_1 < 1, \beta > 0),$$

$$\int_0^T \left\| f(s, x_0, \lambda_0) \right\| ds \le \beta v_0 - (1-\alpha_1) u_0, \quad (0 < u_0 < r_1, 0 < v_2 < r_2).$$

II. Оператор $f(t, x, \lambda)$ непрерывно дифференцируем по λ, существует

$$\Gamma_0 = \left[\int_0^T \frac{\partial f(s, x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} ds \right]^{-1}$$

и

$$\left\| \Gamma_0 \int_0^T \left[\frac{\partial f(s, x, \lambda_0)}{\partial \lambda} - \frac{\partial f(s, x_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \right] ds \right\| \le \alpha_3 r_1 (x \in S_1),$$

III.

$$\left\| \Gamma_0 \left\{ x_T - x_0 - \int_0^T f(s, x_0, \lambda_0) ds \right\} \right\| \le \eta,$$

$$\left\| \Gamma_0 \int_0^T \frac{\partial^2 f(s, x, \lambda)}{\partial \lambda^2} ds \right\| \le k (x \in S_1, \lambda \in S_2).$$

IV. Все выше перечисленные константы подчинены условиям (15).

Легко проверить, что при этих условиях операторы, порождающие правые части системы (19), удовлетворяют всем условиям теоремы 2, следовательно, эту теорему можно применить к задаче (17), (18).

Литература

[1]. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* "Наука", Москва, 1977.

[2]. Мамедов Я.Д., Аширов С.*Методы последовательных приближений для решения операторных уравнений.* Изд. "Турк. Гос. унт", Ашгабад, 1980.

[3]. Nquyen Minh Chuong, Mamedov Ya.D., Khuat Van Ninh. *Approximate solutions of operator equations.* "Science and Tech. publ. house", Hanoi, 1992.

Kxuat V.N., Məmmədov Y.D.

PARAMETRLİ BİRİNCİ TƏRTİB DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Təqdim olunan işdə, əvvəlcə xüsusi operator tənliklər sisteminin həlli tədqiq olunur, sonra isə alınan nəticədən istifadə edilərək, parametrli birinci tərtib differensial tənlik üçün sərhəd məsələsinin həlli nəzərdən keçirilir.

Khuat V.N., Mamedov Ya.D

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH A PARAMETER

At first, a solution of a special system of operator equations is investigated, and then using the obtained result, a solution of a boundary value problem for the first order differential equation with a parameter is studied.