УДК 517.956.4

МАМЕДОВ И.Т., ДЖАФАРОВ Н.Дж.

ФУНКЦИЯ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛАССА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ ТИПА ПАРАБОЛОИДА

Пусть $E_n - n$- мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\dots x_n)$, D- ограниченная область в E_n с границей $\partial D\in C^{1+\lambda}$, $\lambda>0$, причем $0\in D$. Обозначим через $R_{n+1}-(n+1)$- мерное евклидово пространство точек $(x,t)=(x_1,\dots,x_n,t)$, $R_{n+1}^- = R_{n+1}\cap\{(x,t): t<0\}$. Назовем область $Q\subset R_{n+1}^-$ областью типа параболоида (или P - областью), если ее сечение любой гиперплоскостью $t=\tau\ (\tau<0)$ имеет вид: $\left\{x: \frac{x}{2\sqrt{-\tau}}\in D\right\}$ (см. [1-2]). Пусть $Q_T=Q\cap\{(x,t): -T<t<0\}$, $S_T=\partial Q\cap\{(x,t): -T<t<0\}$, $D_T=Q\cap\{(x,t):\ t=-T\}$, $Q_{T_1,T_2}=Q\cap\{(x,t): -T_1<t<-T_2\}$, $T_1>T_2>0$.

Рассмотрим в Q_T следующий параболический оператор

$$L=\Delta+\mu\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i x_j}{4(-t)}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь $\Delta - n$- мерный оператор Лапласа, $-\frac{1}{d^2}<\mu<\infty$, $d=\sup_{y\in D}|y|$. Очевидно, что при сделанных относительно μ предположениях, оператор L равномерно параболичен в Q_T, и его можно считать дивергентным параболическим аналогом известного эллиптического оператора Гилбарга-Серрина [3]. Целью настоящей заметки является получение оценки функции Грина первой краевой задачи для оператора L. Заметим, что в случае $\mu=0$, т.е. когда L - оператор теплопроводности, аналогичная оценка была получена в [1] и [4].

Обозначим через $P(x,t;y,\tau)$ - функцию Грина первой краевой задачи для оператора L в Q_T. Ясно, что по переменным (y,τ) функция P удовлетворяет уравнению $LP=-\delta(y-x,\tau-t)$, а по переменным (x,t) - уравнению $L^*P= =-\delta(y-x,\tau-t)$, где $\delta(x,t)$ - обобщенная функция Дирака, а

$$L^*=\Delta+\mu\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i x_j}{4(-t)}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial}{\partial t}$$

- оператор, формально сопряженный к оператору L.

При этом

$$\lim_{\substack{(y,\tau)\to\partial Q_T \\ (y,\tau)\in Q_T}} P(x,t;y,\tau)=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to S_T \\ (x,t)\in Q_T}} P(x,t;y,\tau)=0.$$

Кроме того, из принципа максимума следует, что $P(x,t;y,\tau)=0$ при $t>\tau$ и

$$\lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_T \\ x\neq y}} P(x,t;y,\tau)=0\,. \tag{1}$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau\in(-T,0)$, *а* $f(y)$ *- произвольная непрерывная на* $\overline{D_{|\tau|}}$ *функция. Тогда, если при* $t\in(-T,\tau)$

$$w_f(x;t;\tau)=\int_{D_{|\tau|}} P(x,y;t,\tau)f(y)dy,$$

то для $x\in D_{|\tau|}$

$$\lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} w_f(x,t;\tau)=f(x). \tag{2}$$

Доказательство. Вначале покажем, что

$$\lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} w_1(x,t;\tau)=1. \tag{3}$$

Обозначим через $v(x;t,\tau)$ - решение первой краевой задачи

$$L^*_{(x,t)}v=0,\quad x\in Q_{T,|\tau|};\quad v\Big|_{S_T\cap\{(x,t):t<\tau\}}=0,\quad v\Big|_{D_{|\tau|}}=1\,. \tag{4}$$

Очевидно, что такое решение существует и единственно, причем для $x\in D_{|\tau|}$

$$\lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} v(x,t;\tau)=1\,. \tag{5}$$

Пусть для $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{T-|\tau|}{2}\right)$

$$a_\varepsilon(t;\tau)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad t\in[-T,\tau-\varepsilon)\\ 0, & \text{если}\quad t\geq\tau-\dfrac{\varepsilon}{2},\end{cases}$$

$a_\varepsilon(t;\tau)\in C^\infty[-T,0]$, $0\leq a_\varepsilon(t;\tau)\leq 1$. Покажем сейчас, что для любой функции $\varphi(t)\in C^1[-T,\tau]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-T}^{\tau}\varphi(t)\frac{\partial a_\varepsilon(t;\tau)}{\partial t}dt=-\varphi(\tau). \tag{6}$$

Действительно

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{\tau}\varphi(t)\frac{\partial a_\varepsilon(t;\tau)}{\partial t}dt&=\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\varphi(t)\frac{\partial a_\varepsilon(t;\tau)}{\partial t}dt=\\&=-\varphi(\tau-\varepsilon)-\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\varphi(t)\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}a_\varepsilon(t;\tau)dt=i_1+i_2\end{aligned} \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что

$$i_1\to-\varphi(\tau)\quad \text{при}\ \ \varepsilon\to 0\,.$$

Кроме того

$$|i_2| \le \sup_{t\in[-T,\tau]} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\right| \cdot \varepsilon \to 0 \ \text{при} \ \varepsilon \to 0.$$

Тогда из (7) вытекает (6).

Рассмотрим функцию $v(x;t,\tau)a_\varepsilon(t;\tau)$. Согласно представлению Грина имеем

$$v(x;t,\tau)a_\varepsilon(t;\tau) = -\int_{Q_T} P(x,y;t,z)L^*(v(y;z,\tau)a_\varepsilon(z;\tau))dydz =$$

$$= -\int_{Q_{T,|\tau|}} P(x,y;t,z)L^*(v(y;z,\tau)a_\varepsilon(z;\tau))dydz.$$

Но согласно (4)

$$L^*(v(y;z,\tau)a_\varepsilon(z,\tau)) = v(y;z,\tau)\frac{\partial a_\varepsilon}{\partial z}(z;\tau).$$

Поэтому, учитывая (6) и (5), для $(x,t)\in Q_{T,|\tau|}$ получаем

$$v(x;t,\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0} v(x;t,\tau)a_\varepsilon(t;\tau) = \int_{D_{|\tau|}} P(x,y;t,\tau)v(y;\tau,\tau)dy = \int_{D_{|\tau|}} P(x,y;t,\tau)dy.$$

Теперь требуемое предельное равенство (3) следует из (5). Пусть $f(y)\in C(\overline{D}_{|\tau|})$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $x,y\in D_{|\tau|}$, $|x-y|<\delta$

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon_1.$$

Обозначим через M точную верхнюю грань $|f(y)|$ на $\overline{D}_{|\tau|}$. Имеем

$$\left|\lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} w_f(x;t,\tau) - f(x)\right| \le$$

$$\le \lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} \left(\int_{D_{|\tau|}\cap\{|y-x|<\delta\}} + \int_{D_{|\tau|}\cap\{|y-x|\ge\delta\}}\right) P(x,y;t,\tau)|f(y)-f(x)|dx = I_1 + I_2$$

Из (3) заключаем

$$I_1 \le \varepsilon_1 \lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} w_1(x;t,\tau) = \varepsilon_1 \tag{8}$$

Кроме того, учитывая (1), получаем

$$I_2 \le 2M \lim_{\substack{t\to\tau \\ (x,t)\in Q_{T,|\tau|}}} \int_{D_{|\tau|}\cap\{|y-x|\ge\delta\}} P(x,y;t,\tau)dy = 0 \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует требуемое предельное равенство (2).

Лемма доказана.

Пусть $u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)$. Имеем

$$Lu = \Delta u + \mu\sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{4(-t)}u_{ij} + \mu\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{x_i x_j}{4(-t)}\right)_i u_j - u_t =$$

$$= \Delta u + \mu\sum_{i,j=1}^n \frac{x_i x_j}{4(-t)}u_{ij} + \mu(n-1)\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{4(-t)}u_j - u_t$$

где $u_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $i, j = 1, \ldots, n$.

Сделаем замену переменных

$$\xi_i = \frac{x_i}{2\sqrt{-t}}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \eta = \ln\frac{1}{-t}$$

Тогда область Q_T перейдет в полубесконечный цилиндр $D \times \left(\ln\dfrac{1}{T}, \infty\right)$, и в новых переменных выражение Lu примет вид

$$Lu = \frac{e^\eta}{4}\left[\Delta u + \mu\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\xi_j u_{\xi_i\xi_j} + (\mu(n+1)-2)\sum_{j=1}^{n}\xi_j u_{\xi_j} - 4u_\eta\right] =$$

$$= \frac{e^\eta}{4}\left[\Delta u + \mu\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\xi_i\xi_j u_{\xi_j}\right) - 2\sum_{j=1}^{n}\xi_j u_{\xi_j} - 4u_\eta\right].$$

Обозначим для $i, j = 1, \ldots, n$ $\delta_{ij} + \mu\xi_i\xi_j$ через $a_{ij}(\xi)$. Здесь δ_{ij} - символ Кронекера. Найдем сейчас положительную, дважды непрерывно дифференцируемую в D функцию $B(\xi)$ такую, что

$$Lu = \frac{e^\eta}{4}\left[B^{-1}(\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(B(\xi)a_{ij}(\xi)u_{\xi_j}\right) - 4u_\eta\right] \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что для справедливости (10) достаточно выполнения равенства

$$B^{-1}(\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial B(\xi)}{\partial\xi_i}a_{ij}(\xi)u_{\xi_j} = -2\sum_{j=1}^{n}\xi_j u_{\xi_j} \tag{11}$$

Если обозначить $\ln B(\xi)$ через $H(\xi)$, то (11) эквивалентно

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial H(\xi)}{\partial\xi_i}a_{ij}(\xi)u_{\xi_j} = -2\sum_{j=1}^{n}\xi_j u_{\xi_j},$$

т.е.

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial H(\xi)}{\partial\xi_i}a_{ij}(\xi)u_{\xi_j} = -2\xi_j; \quad j = 1, \ldots, n.$$

Полагая для $i = 1, \ldots, n$ $M_i(\xi) = \dfrac{\partial H(\xi)}{\partial\xi_i}$, окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n}M_i(\xi)a_{ij}(\xi) = -2\xi_j; \quad j = 1, \ldots, n \tag{12}$$

Отметим, что после нахождения функций из системы (12) необходимо позаботиться, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial M_i(\xi)}{\partial\xi_j} = \frac{\partial M_j(\xi)}{\partial\xi_i}; \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Пусть $(M(\xi), \xi) = \sum_{i=1}^{n}M_i(\xi)\xi_i$. Тогда из (12) следует, что

$$(M(\xi), \xi) = -\frac{2|\xi|^2}{1+\mu|\xi|^2},$$

т.е.

$$M_i(\xi) = -\frac{2\xi_i}{1+\mu|\xi|^2}; \quad i = 1,..,n.$$

Очевидно, что условия (13) выполнены. Таким образом, если $\mu \neq 0$, то

$$H(\xi) = -\frac{1}{\mu}\ln\left(1+\mu|\xi|^2\right),$$

и поэтому

$$B(\xi) = \left(1+\mu|\xi|^2\right)^{-\frac{1}{\mu}} \tag{14}$$

В случае, если $\mu = 0$, то $H(\xi) = -|\xi|^2$ и соответственно

$$B(\xi) = e^{-|\xi|^2} \tag{15}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу на собственные значения

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(B(\xi) a_{ij}(\xi) v_{\xi_j}\right) + \lambda B(\xi) v = 0; \;\; \xi \in D \\ &v\big|_{\partial D} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где λ - спектральный параметр, а функция $B(\xi)$ определена равенствами (14) $(\mu \neq 0)$ или (15) $(\mu = 0)$.

Известно (см. [5]), что спектр задачи (16) дискретен, собственные числа λ_k положительны, и в пространстве функций, квадратично суммируемых в D с весом $B(\xi)$, существует ортонормированный базис из собственных функций $\{v_k(\xi)\}$, $k = 1,2,\ldots$, соответствующих собственным значениям $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$ (с учетом их кратности). При этом наименьшее собственное число λ_1 - простое.

Лемма 2. *Пусть для* $(x,t) \in Q_T$ $G(x,t) = (-t)^{-n/2} B\left(\dfrac{x}{2\sqrt{-t}}\right)$, *где функция* $B(\xi)$ *определена равенствами (14) или (15). Тогда*

$$L^* G(x,t) = 0; \quad (x,t) \in Q_T \tag{17}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\mu \neq 0$. В переменных (ξ,η) $G(\xi,\eta) = e^{\eta\frac{n}{2}} B(\xi)$ и (17) эквивалентно равенству

$$L^* G = \Delta G + \mu \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \xi_j G_{\xi_i \xi_j} + \left(\mu(n+1)+2\right)\sum_{i=1}^{n} \xi_i G_{\xi_i} + 4G_\eta = 0 \tag{18}$$

Обозначим $1+\mu|\xi|^2$ через $\rho(\xi)$. Имеем

$$L^*G = e^{\eta\frac{n}{2}}\rho^{-\frac{1}{\mu}}\left[\frac{4(\mu+1)}{\rho^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - \frac{2n}{\rho} + \frac{4\mu(\mu+1)}{\rho^2}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i^2\xi_j^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{2\mu}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - \frac{2(\mu(n+1)+2)}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 + 2n\right] =$$

$$= e^{\eta\frac{n}{2}}\rho^{-\frac{1}{\mu}}\left[\frac{4(\mu+1)|\xi|^2 + 4(\mu+1)|\xi|^4}{\rho^2} - \frac{2n + 2\mu|\xi|^2 + 2(\mu(n+1)+2)|\xi|^2}{\rho} + 2n\right] =$$

$$= e^{\eta\frac{n}{2}}\rho^{-\frac{1}{\mu}}\left[I_1 + I_2 + 2n\right] \tag{19}$$

С другой стороны

$$I_1 = 4\frac{\left(\mu|\xi|^2+1\right)^2 + \mu|\xi|^4 - 1 - (\mu-1)|\xi|^2}{\rho^2} = 4 + 4\frac{\mu|\xi|^4 + |\xi|^2 - \left(\mu|\xi|^2+1\right)}{\rho^2} =$$

$$= 4 + \frac{4|\xi|^2\left(\mu|\xi|^2+1\right)}{\rho^2} - \frac{4}{\rho} = 4 + 4\frac{|\xi|^2-1}{\rho},$$

и далее

$$I_2 = -2\frac{(n+2)\left(\mu|\xi|^2+1\right)}{\rho} + 2\frac{2-2|\xi|^2}{\rho} = -2(n+2) + 4\frac{1-|\xi|^2}{\rho},$$

что с учетом (19) даст

$$L^*G = e^{\eta\frac{n}{2}}\rho^{-\frac{1}{\mu}}\left[4 + 4\frac{|\xi|^2-1}{\rho} - 2(n+2) + 4\frac{1-|\xi|^2}{\rho} + 2n\right] = 0$$

Таким образом требуемое равенство (18) доказано.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda_k - k$ *- е собственное число спектральной задачи (16),* $v_k(\xi)$*- соответствующая ему собственная функция, а* $z_k(x,t) = G(x,t)\times$ $\times(-t)^{-\frac{\lambda_k}{4}}v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)$, $n = 1,2,\ldots,$. Тогда

$$L^*z_k(x,t) = 0;\quad (x,t)\in Q_T \tag{20}$$

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей леммы, ограничимся случаем $\mu \neq 0$ и заметим, что в переменных (ξ,η) (20) эквивалентно равенству

$$L^*z_k = \Delta z_k + \mu\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\xi_j(z_k)_{\xi_i\xi_j} + (\mu(n+1)+2)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(z_k)_{\xi_i} + 4(z_k)_\eta =$$

$$Nz_k + 4(z_k)_\eta = 0 \tag{21}$$

При этом $z_k(\xi,\eta) = e^{\frac{\eta}{2}\left(n+\frac{\lambda_k}{2}\right)}B(\xi)v_k(\xi) = e^A\cdot B(\xi)v_k(\xi)$. Имеем

$$Nz_k = e^A\left(v_kNB + BNv_k + 2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\xi)B_{\xi_i}(v_k)_{\xi_j}\right) \tag{22}$$

Из леммы 2 следует, что

$$NB=-2n\rho^{-\frac{1}{\mu}}=-2nB(\xi) \qquad (23)$$

Кроме того, с учетом (16) получаем

$$Nv_k=\Delta v_k+\mu\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\xi_j(v_k)_{\xi_i\xi_j}+(\mu(n+1)-2)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}+4\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}=$$
$$=B^{-1}(\xi)\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(B(\xi)a_{ij}(\xi)(v_k)_{\xi_j}\right)+4\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}=-\lambda_k v_k+4\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}. \qquad (24)$$

Далее имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\xi)B_{\xi_i}(v_k)_{\xi_j}=\sum_{i,j=1}^{n}(\delta_{ij}+\mu\xi_i\xi_j)\left(-\frac{2\xi_i}{\rho}B(\xi)\right)(v_k)_{\xi_j}=$$
$$=-\frac{2}{\rho}B(\xi)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}-\frac{2\mu B(\xi)|\xi|^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}=$$
$$=-\frac{2}{\rho}B(\xi)\left(1+\mu|\xi|^2\right)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}=-2B(\xi)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i} \qquad (25)$$

Используя теперь (23)-(25) в (22), заключаем

$$Nz_k=e^{A}\left[-2nB(\xi)v_k-\lambda_k B(\xi)v_k+4B(\xi)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}-4B(\xi)\sum_{i=1}^{n}\xi_i(v_k)_{\xi_i}\right]=$$
$$=-(2n+\lambda_k)B(\xi)v_k e^{A} \qquad (26)$$

Заметим, что

$$4(z_k)_\eta=(2n+\lambda_k)z_k=(2n+\lambda_k)B(\xi)v_k e^{A} \qquad (27)$$

Учитывая (26) и (27) в (21), получаем, что $L^*z_k=0$.

Лемма доказана.

Теорема. *Пусть* $0<T_2<T_1<T,\ 0<T_4<T_3<T$ *и* $T_4\ge(1+\beta)T_1$, *где* β *- положительная константа. Тогда, если* $(y,\tau)\in Q_{T_1,T_2}$, $(x,t)\in Q_{T_3,T_4}$, *то для функции Грина* $P(x,t;y,\tau)$ *справедлива оценка*

$$P(x,t;y,\tau)\le C_1|t|^{-\frac{n}{2}-\frac{\lambda_1}{4}}|\tau|^{\frac{\lambda_1}{4}}, \qquad (28)$$

где константа $C_1>0$ *зависит лишь от* n,μ,β *и области* D.

Доказательство. Зафиксируем $\tau\in(-T_1,-T_2)$, точку $(x,t)\in Q_{T_3,T_4}$ и разложим функцию $P(x,t;y,\tau)$ в ряд по системе собственных функций $\left\{v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right)\right\},k=1,2,\ldots,$ в области $D_{|\tau|}$. В силу определения P - области $D_{|\tau|}$ является преобразованием подобия области D с коэффициентом $2\sqrt{-\tau}$. Поэтому для коэффициентов Фурье $p_k(x,t;\tau),\ k=1,2,\ldots,$ этого разложения справедливо равенство

$$p_k(x,t;\tau)=2^{-n}\int_{D_{|\tau|}}(-\tau)^{-\frac{n}{2}}B\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right)v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right)P(x,t;y,\tau)dy=$$
$$=2^{-n}\int_{D_{|\tau|}}G(y,\tau)v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right)P(x,t;y,\tau)dy.$$

Используя лемму 1 и равенства $L^*_{(x,t)}P = 0 \quad \left((x,t)\neq(y,\tau)\right)$, получаем что при всяком натуральном *k* функция $p_k(x,t;\tau)$ по переменным (x,t) является решением первой краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &L^* p_k = 0, \quad (x,t)\in Q_{T_1,|\tau|};\\ &p_k\Big|_{S_T\cap\{(x,t):-T_1<t<\tau\}} = 0, \quad p_k\Big|_{D_{|\tau|}} = 2^{-n} G(x,\tau)\, v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-\tau}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Из принципа максимума следует, что решение краевой задачи (29) единственно. Найдем сейчас это решение непосредственно. Согласно лемме 3 заключаем

$$L^* z_k(x,t) = 0, \quad (x,t)\in Q_{T_1,|\tau|};$$

$$z_k\Big|_{S_T\cap\{(x,t):-T_1<t<\tau\}} = 0, \quad z_k\Big|_{D_{|\tau|}} = G(x,\tau)\, v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-\tau}}\right)(-\tau)^{\frac{-\lambda_k}{4}}.$$

Отсюда вытекает, что решение $p_k(x,t;\tau)$ задачи (29) представляется в виде

$$p_k(x,t;\tau) = 2^{-n}(-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} z_k(x,t) = 2^{-2}(-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} G(x,t)\, v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)(-t)^{\frac{-\lambda_k}{4}}.$$

Таким образом пока формально можно положить

$$P(x,t;y,\tau) = 2^{-n} G(x,t)\sum_{k=1}^{\infty}(-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \tag{30}$$

Займемся сейчас вопросом сходимости ряда в (30). Рассмотрим в области D эллиптический оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)B(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

и предположим вначале, что $n\geq 3$. Обозначим через $k(\xi,s)$ его функцию Грина первого рода. Так как коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ являются гладкими функциями в $\overline{D}$ и $\partial D\in C^{1+\lambda}$, то

$$0\leq k(\xi,s)\leq\frac{C_2}{|\xi-s|^{n-2}}$$

где положительная константа C_2 зависит лишь от μ,n и D. При этом $k(\xi,s)=k(s,\xi)$ (см. напр. [6]). Известно [5], что спектральная задача(16) эквивалентна нахождению характеристических чисел λ_k и собственных функций $v_k(\xi)$ интегрального уравнения

$$v(\xi) = \lambda\int_D B(s)k(\xi,s)v(s)ds.$$

Повторяя рассуждения работы [4], получаем, что если $p=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-p} v_k^2(\xi)\leq C_3 \tag{31}$$

где константа $C_3>0$ зависит лишь от μ,n и D. При этом ряд в (31) сходится равномерно в D. Если $n=2$, то, учитывая логарифмческую особенность при $\xi=s$

Используя лемму 1 и равенства $L^*_{(x,t)}P = 0 \quad \left((x,t)\neq(y,\tau)\right)$, получаем что при всяком натуральном *k* функция $p_k(x,t;\tau)$ по переменным (x,t) является решением первой краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &L^* p_k = 0, \quad (x,t)\in Q_{T_1,|\tau|};\\ &p_k\Big|_{S_T\cap\{(x,t):-T_1<t<\tau\}} = 0, \quad p_k\Big|_{D_{|\tau|}} = 2^{-n}G(x,\tau)v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-\tau}}\right)\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Из принципа максимума следует, что решение краевой задачи (29) единственно. Найдем сейчас это решение непосредственно. Согласно лемме 3 заключаем

$$L^* z_k(x,t) = 0, \quad (x,t)\in Q_{T_1,|\tau|};$$

$$z_k\Big|_{S_T\cap\{(x,t):-T_1<t<\tau\}} = 0, \quad z_k\Big|_{D_{|\tau|}} = G(x,\tau)v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-\tau}}\right)(-\tau)^{\frac{-\lambda_k}{4}}.$$

Отсюда вытекает, что решение $p_k(x,t;\tau)$ задачи (29) представляется в виде

$$p_k(x,t;\tau) = 2^{-n}(-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} z_k(x,t) = 2^{-2}(-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} G(x,t)v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)(-t)^{\frac{-\lambda_k}{4}}.$$

Таким образом пока формально можно положить

$$P(x,t;y,\tau) = 2^{-n}G(x,t)\sum_{k=1}^{\infty}(-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \tag{30}$$

Займемся сейчас вопросом сходимости ряда в (30). Рассмотрим в области D эллиптический оператор

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)B(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

и предположим вначале, что $n\geq 3$. Обозначим через $k(\xi,s)$ его функцию Грина первого рода. Так как коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ являются гладкими функциями в $\overline{D}$ и $\partial D\in C^{1+\lambda}$, то

$$0\leq k(\xi,s)\leq \frac{C_2}{|\xi-s|^{n-2}}$$

где положительная константа C_2 зависит лишь от μ, n и D. При этом $k(\xi,s)=k(s,\xi)$ (см. напр. [6]). Известно [5], что спектральная задача(16) эквивалентна нахождению характеристических чисел λ_k и собственных функций $v_k(\xi)$ интегрального уравнения

$$v(\xi) = \lambda\int_D B(s)k(\xi,s)v(s)ds.$$

Повторяя рассуждения работы [4], получаем, что если $p=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-p}v_k^2(\xi)\leq C_3 \tag{31}$$

где константа $C_3>0$ зависит лишь от μ, n и D. При этом ряд в (31) сходится равномерно в D. Если $n=2$, то, учитывая логарифмческую особенность при $\xi=s$

функции Грина $k(\xi,s)$, можно вновь доказать справедливость (31). При $n=1$ функция Грина непрерывна при $\xi = s$, и поэтому (31) справедливо для $p=1$ (см. [7]). Таким образом для всякого натурального n существует $p \ge 1$, $p = p(n)$ такое, что справедливо неравенство (31).

Кроме того, для $\beta > 0$

$$\sup_{k=1,2,\ldots,} (1+\beta)^{-\lambda_k/4} \lambda_k^p = B = B(\beta) < \infty \tag{32}$$

С учетом (31) и (32) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-\tau)^{\frac{\lambda_k}{4}} (-t)^{-\frac{\lambda_k}{4}} v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{-\frac{\lambda_k}{4}} v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} (1+\beta)^{-\frac{\lambda_k}{4}} \lambda_k^p \lambda_k^{-p} \times$$

$$\times v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \le B \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p} v_k^2\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right)} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-p} v_k^2\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right)} \le BC_3$$

При этом ряд сходится равномерно для $(x,t) \in Q_{T_3,T_4}$, $(y,\tau) \in Q_{T_1,T_2}$. Возвращаясь теперь к (30), получаем

$$P(x,t;y,\tau) \le 2^{-n} G(x,t) \cdot \left(\frac{-t}{-\tau}\right)^{-\frac{\lambda_1}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-t}{-\tau}\right)^{-\frac{\delta_k}{4}} v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \tag{33}$$

где $\delta_k = \lambda_k - \lambda_1$; $k = 1,2,\ldots,$. Нетрудно видеть, что $\delta_k \ge 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = \infty$. Поэтому, используя вышеприведенные соображения, заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-t}{-\tau}\right)^{-\frac{\delta_k}{4}} v_k\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right) v_k\left(\frac{y}{2\sqrt{-\tau}}\right) \le C_4 \tag{34}$$

где константа $C_4 > 0$ зависит лишь от μ, n, D и β. Из (33) и (34) вытекает, что

$$P(x,t;y,\tau) \le 2^{-n} C_4 G(x,t) \cdot |t|^{-\frac{\lambda_1}{4}} |\tau|^{\frac{\lambda_1}{4}} \tag{35}$$

Учтем теперь, что

$$G(x,t) \le |t|^{-\frac{n}{2}} \tag{36}$$

Тогда из (35) и (36) следует требуемая оценка (28) с $C_1 = 2^{-n} C_4$. Теорема доказана.

Литература

[1]. Алхутов Ю.А. *Гладкостные и предельные свойства решений параболических уравнений второго порядка.* Дис. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук, М., МГУ, 1992, 237 с.

[2]. Алхутов Ю.А. *Поведение решений параболических уравнений второго порядка в нецилиндрических областях.* Докл. РАН, 1995, т.345, №5, с.583-585.

[3]. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М., "Наука", 1973, 576 с.

[4]. Мамедов И.Т., Гасанова И.А., *Оценки функции Грина для параболических уравнений 2-го порядка в нецилиндрических областях.* Труды ИММ АН Азербайджана, 1996, т. IV(XII), с.46-53.

[5]. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики,* М., "Наука", 1988, 512 с.

[6]. Миранда К. *Уравнения с частными производными эллиптического типа*, М., “ИЛ”, 1957, 256 с.