1998 ТОМ IX(XVII)

МАТЕМАТИКА

УДК 62.501.4

АДИЛОВ Г.Р.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Пусть задана система линейных уравнений вида

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_1^n$, $b = \left(b_i\right)_1^n$.

При некоторых условиях, накладываемых на матрицу A и вектор b, в системе (1) существует неотрицательное решение. В частности, таковыми являются условия

$$a_{ij} \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1, \quad b_i \ge 0, \quad i, j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

в задачах межотраслевого баланса, что вытекает из экономического смысла этих задач.

Одним из итерационных процессов для решения систем линейных уравнений является метод простой итерации, который описывается по формуле

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b \tag{3}$$

начиная с некоторого исходного приближения $x^{(0)}$, которое может выбраться, вообще говоря, произвольно.

Для того, чтобы процесс (3) сходился, достаточно, чтобы какая-либо норма матрицы A была меньше единицы. А оценка быстроты сходимости процесса последовательных приближений в терминах нормы дается в следующей форме (см. в [1])

$$\left\|x^* - x^{(k)}\right\| \le \|A\|^k \left(\left\|x^{(0)}\right\| + \|b\| / \left(1 - \|A\|\right)\right),$$

где x^* - точное решение системы (1).

Ясно, что решение задач (1)-(2), описывающих функционирование реальных экономических систем, часто оказывается затруднительным из за большой размерности матрицы A. Например, вполне реальной может считаться задача с миллионами переменных. Создавая специальные алгоритмы, учитывающих структурную специфику (например, см. в [2]) могут частично решать эту проблему.

Однако, в данной работе исследуется другая проблема, которая возникает при большой размерности. Оказывается с увеличением размерности скорость сходимости итерационного процесса (3) уменьшается в определенном смысле.

Пространство матриц размера $n \times n$ рассмотрим как n^2 - мерное евклидово пространство с обычной мерой. Через $\Omega(n)$ обозначим множество матриц удовлетворяющих условиям (2), т.е.

$$\Omega(n)=\left\{A\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\le 1,\ a_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n}\right.\right\},$$

а через $\Phi(n;\varepsilon)$ множество неотрицательных матриц, удовлетворяющих условию $1-\varepsilon\le\|A\|\le 1$, т.е.

$$\Phi(n;\varepsilon)=\left\{A\left|1-\varepsilon\le\max_{i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\le 1,\ a_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n}\right.\right\}.$$

Здесь $\varepsilon>0$ - заданное число.

Ясно, что $\Phi(n;\varepsilon)\subset\Omega(n)$.

Теорема. *Пусть фиксировано сколь угодно малое* $\varepsilon>0$. *Тогда*

$$mes\Phi(n;\varepsilon)/mes\Omega(n)\to 1\quad при\quad n\to\infty.$$

Доказательство. Мера множества $\Omega(n)$ задается n^2 - кратным интегралом

$$mes\Omega(n)=\overbrace{\int\limits_{\substack{\sum_j a_{ij}\le 1,\\ a_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n}}}\!\!\cdots\int}^{n^2} da_{11}da_{12}\ldots da_{nn}.$$

Поскольку a_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ независимые переменные, получим, что

$$mes\Omega(n)=\left[\overbrace{\int\limits_{\substack{\sum_j a_{1j}\le 1,\\ a_{1j}\ge 0,\ j=\overline{1,n}}}\!\!\cdots\int}^{n} da_{11}da_{12}\ldots da_{1n}\right]^{n}.$$

Опираясь на формулу Дирихле

$$\overbrace{\int\limits_{\substack{x_1+x_2+\ldots x_n\le 1\\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ldots,x_n\ge 0}}\!\!\cdots\int}^{n} x_1^{P_1-1}x_2^{P_2-1}\ldots x_n^{P_n-1}dx_1dx_2\ldots dx_n=\frac{\Gamma(P_1)\Gamma(P_2)\ldots\Gamma(P_n)}{\Gamma(P_1+P_2+\ldots+P_n+1)}$$

легко вычислить интеграл в скобке и получим

$$mes\Omega(n)=\left(\frac{1}{n!}\right)^{n}. \tag{4}$$

Через $\mathcal{F}(n;\varepsilon)$ обозначим множества неотрицательных матриц удовлетворяющих условию $1-\varepsilon\le\sum_j a_{ij}\le 1,\ i=\overline{1,n}$, т.е.

$$\mathcal{F}(n;\varepsilon)=\left\{A\left|1-\varepsilon\le\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\le 1,\ a_{ij}\ge 0, i,j=\overline{1,n}\right.\right\}.$$

Ясно, что $\mathcal{F}(n;\varepsilon)\subset\Phi(n;\varepsilon)$. Тогда достаточно показать, что

$$mes\mathcal{F}(n;\varepsilon)/mes\Omega(n)\to 1\quad при\quad n\to\infty.$$

А теперь вычислим $mes\,\mathcal{F}(n;\varepsilon)$

$$mes\,\mathcal{F}(n;\varepsilon)=\overbrace{\int\limits_{\substack{1-\varepsilon\le\sum_j a_{1j}\le 1,\\ a_{ij}\ge 0,\ i,j=\overline{1,n}}}\!\!\dots\int}^{n^2} da_{11}da_{12}\dots da_{1n}=\left[\overbrace{\int\limits_{\substack{1-\varepsilon\le\sum_j a_{1j}\le 1,\\ a_{1j}\ge 0,\ j=\overline{1,n}}}\!\!\dots\int}^{n} da_{11}da_{12}\dots da_{1n}\right]^n=$$

$$=\left[\frac{1}{n!}-\overbrace{\int\limits_{\substack{\sum_j a_{1j}<1-\varepsilon,\\ a_{1j}\ge 0,\ j=\overline{1,n}}}\!\!\dots\int}^{n} da_{11}da_{12}\dots da_{1n}\right]^n=\left(\frac{1}{n!}\right)^n\left(1-(1-\varepsilon)^n\right)^n. \qquad (5)$$

Из (5), (6) получим

$$mes\,\mathcal{F}(n;\varepsilon)\Big/mes\,\Omega(n)=\left(1-(1-\varepsilon)^n\right)^n\to 1 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Теорема доказана.

Полученный результат означает, что множество матриц $\Omega(n)$, которое играет важную роль в экономике обладает следующим свойством: при фиксированном сколь угодно малом $\varepsilon>0$, нормы "почти всех" матриц находятся в интервале $(1-\varepsilon,1)$. А именно, в этом смысле с увеличением размерности скорость сходимости итерационного процесса (3) уменьшается.

В рамках такого подхода исследованы и другие проблемы из области экономики, которые возникают при больших размерностях (см. [3], [4]).

Литература

[1]. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* Москва, 1960.

[2]. Шенников Б.А. *Применение методов итеративного агрегирования для решения систем линейных уравнений.* Экономика и математические методы. Т.II, вып. 5, 1966.

[3]. Адилов Г.Р., Опойцев В.И. *Об асимптотическом агрегировании.* Автоматика и телемеханика, 1989, №1.

[4]. Адилов Г.Р. *Об асимптотическом поведении ведущих собственных значений неотрицательных матриц.* Труды ИММ АН Азербайджана, Баку, 1994.

Adilov Q.R.

BÖYÜK ÖLÇÜLÜ XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİ ÜÇÜN OLAN İTERATİV PROSESLƏRİN YIĞILMA SÜR`ƏTİ HAQQINDA

Sahələrarası balans modelini təsvir edən xətti tənliklər sisteminin həlli üçün iterativ prosesə baxılır. Böyük ölçülər üçün bu prosesin yığılma sür`əti tədqiq olunur.

Adilov G.R.

ON CONVERGENCE SPEED OF ITERATIVE PROCESS OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS ON LARGE DIMENSIONS

The iterative process of systems of linear equations describing the model of interbranch baling is considered and convergence speed on large dimensions is investigated.