УДК 517.926

МАМЕДОВ Ю.А., ГУСЕЙНОВА Л.М.

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Асимптотика собственных значений (с.з.) оператора, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением n-го порядка и регулярными краевыми условиями давно известна (см. напр.[1], [2]). В данной заметке мы, с целью дальнейшего исследования вопроса корректности соответствующих смешанных задач, получим уточненное асимптотическое представление для с.з. $\mu = \lambda^3$ задачи

$$y''' + p(x)y' + q(x)y - \lambda^3 y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_i(y) = \alpha_i y^{(k_i)}(0) + \beta_i y^{(k_i)}(1) + \sum_{j=0}^{k_i - 1}\left[\alpha_{ij} y^{(j)}(0) + \beta_{ij} y^{(j)}(1)\right] = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

$$2 \ge k_1 \ge k_2 \ge k_3 \ge 0, \quad k_1 > k_3 \tag{2}$$

и установим некоторые свойства его младших слагаемых.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - числа $\varepsilon_k = \exp\left(\frac{2k\pi}{3} i\right)$ $(k = 1,2,3)$, пронумерованные в произвольном порядке. Для постоянных векторов $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3), \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ обозначим

$$W(a,b,c,\omega) = \begin{vmatrix} a_1\omega_1^{k_1} & b_1\omega_2^{k_1} & c_1\omega_3^{k_1} \\ a_2\omega_1^{k_2} & b_2\omega_2^{k} & c_2\omega_3^{k_2} \\ a_3\omega_1^{k_3} & a_3\omega_2^{k_3} & a_3\omega_3^{k_3} \end{vmatrix}$$

$$W_0(a,b,c) = W(a,b,c,\varepsilon). \tag{3}$$

Предположим, что выполнены условия:

1^0. $p(x) \in C^1[0,1], \quad q(x) \in C[0,1]$;

2^0. Граничные условия (2) регулярны по Биркгофу [1], т.е.

$$W_0(\alpha, \alpha, \beta) \ne 0, \quad W_0(\alpha, \beta, \beta) \ne 0, \tag{4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Хорошо известно, что из (4) следует справедливость неравенств

$$W(\alpha, \alpha, \beta, \omega) \ne 0, \quad W_0(\alpha, \beta, \beta, \omega) \ne 0$$

при любой нумерации чисел ω_k $(k = 1,2,3)$. Это вытекает и из следующей леммы, которая понадобится нам и в дальнейшем.

Лемма 1. *Для любых векторов а, в, с, и при любой нумерации чисел* ω_k $(k = 1,2,3)$ *справедливы равенства*:

$$\omega_2^{k_1+k_2+k_3} W(a,b,c,\omega) = \omega_1^{k_1+k_2+k_3} W(c,a,b,\omega) = \omega_3^{k_1+k_2+k_3} W(b,c,a,\omega). \tag{5}$$

Доказательство этого утверждения элементарно и непосредственно следует из очевидной формулы

$$\omega_k^2 = \omega_j \omega_s \quad (k, j, s = 1,2,3; k \ne j, \quad k \ne s, j \ne s),$$

верной при любой нумерации чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.926

МАМЕДОВ Ю.А., ГУСЕЙНОВА Л.М.

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕГУЛЯРНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Асимптотика собственных значений (с.з.) оператора, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением n-го порядка и регулярными краевыми условиями давно известна (см. напр.[1], [2]). В данной заметке мы, с целью дальнейшего исследования вопроса корректности соответствующих смешанных задач, получим уточненное асимптотическое представление для с.з. $\mu = \lambda^3$ задачи

$$y''' + p(x)y' + q(x)y - \lambda^3 y = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_i(y) = \alpha_i y^{(k_i)}(0) + \beta_i y^{(k_i)}(1) + \sum_{j=0}^{k_i-1}\left[\alpha_{ij} y^{(j)}(0) + \beta_{ij} y^{(j)}(1)\right] = 0 \quad (i = 1,2,3)$$

$$2 \ge k_1 \ge k_2 \ge k_3 \ge 0, \quad k_1 > k_3 \tag{2}$$

и установим некоторые свойства его младших слагаемых.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ - числа $\varepsilon_k = \exp\left(\dfrac{2k\pi}{3} i\right)$ $(k = 1,2,3)$, пронумерованные в произвольном порядке. Для постоянных векторов $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3), \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ обозначим

$$W(a,b,c,\omega) = \begin{vmatrix} a_1\omega_1^{k_1} & b_1\omega_2^{k_1} & c_1\omega_3^{k_1} \\ a_2\omega_1^{k_2} & b_2\omega_2^{k} & c_2\omega_3^{k_2} \\ a_3\omega_1^{k_3} & a_3\omega_2^{k_3} & a_3\omega_3^{k_3} \end{vmatrix}$$

$$W_0(a,b,c) = W(a,b,c,\varepsilon). \tag{3}$$

Предположим, что выполнены условия:

1^0. $p(x) \in C^1[0,1], \quad q(x) \in C[0,1]$;

2^0. Граничные условия (2) регулярны по Биркгофу [1], т.е.

$$W_0(\alpha,\alpha,\beta) \ne 0, \quad W_0(\alpha,\beta,\beta) \ne 0, \tag{4}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Хорошо известно, что из (4) следует справедливость неравенств

$$W(\alpha,\alpha,\beta,\omega) \ne 0, \quad W_0(\alpha,\beta,\beta,\omega) \ne 0$$

при любой нумерации чисел ω_k $(k = 1,2,3)$. Это вытекает и из следующей леммы, которая понадобится нам и в дальнейшем.

Лемма 1. *Для любых векторов а, в, с, и при любой нумерации чисел* ω_k $(k = 1,2,3)$ *справедливы равенства*:

$$\omega_2^{k_1+k_2+k_3} W(a,b,c,\omega) = \omega_1^{k_1+k_2+k_3} W(c,a,b,\omega) = \omega_3^{k_1+k_2+k_3} W(b,c,a,\omega). \tag{5}$$

Доказательство этого утверждения элементарно и непосредственно следует из очевидной формулы

$$\omega_k^2 = \omega_j \omega_s \quad (k, j, s = 1,2,3; k \ne j, \quad k \ne s, j \ne s),$$

верной при любой нумерации чисел $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Комплексную λ -плоскость разобем на секторы

$$\sum_s \left\{ \lambda : \frac{(s-1)\pi}{3} \le \arg\lambda < \frac{s\pi}{3} \right\} \quad (s=1,2,\ldots,6)$$

и им поставим в соответствие следующие нумерации чисел ω_k:

$$\left.\sum\nolimits_1 \right) \omega_1=\varepsilon_2, \omega_1=\varepsilon_3, \omega_3=\varepsilon_1; \qquad \left.\sum\nolimits_4 \right) \omega_1=\varepsilon_1, \omega_2=\varepsilon_3, \omega_3=\varepsilon_2;$$

$$\left.\sum\nolimits_2 \right) \omega_1=\varepsilon_2, \omega_2=\varepsilon_1, \omega_3=\varepsilon_3; \qquad \left.\sum\nolimits_5 \right) \omega_1=\varepsilon_3, \omega_2=\varepsilon_1, \omega_3=\varepsilon_2;$$

$$\left.\sum\nolimits_3 \right) \omega_1=\varepsilon_1, \omega_2=\varepsilon_2, \omega_3=\varepsilon_3; \qquad \left.\sum\nolimits_6 \right) \omega_1=\varepsilon_3, \omega_2=\varepsilon_2, \omega_3=\varepsilon_1. \tag{6}$$

Легко видеть, что при такой нумерации для произвольных s $(1 \le s \le 6)$ и $\lambda \in \sum_s$ имеем:

$$\operatorname{Re}\lambda\omega_1 \le \operatorname{Re}\lambda\omega_2 \le \operatorname{Re}\lambda\omega_3$$

Поэтому, при условии 1^0, в каждом из секторов $\sum_s$ уравнение (1) имеет линейно-независимые частные решения $y_j(x,\lambda)$ $(j=1,2,3)$, допускающие асимптотику [1], [2]:

$$\frac{d^m y_j(x,\lambda)}{dx^m} = (\lambda\omega_j)^m e^{\lambda\omega_j x}\left[1+\lambda^{-1}g_{jm}(x)+O(\lambda^{-2})\right], (j=1,2,3; m=0,1,2)\ (|\lambda|\to\infty). \tag{7}$$

Причем оказывается, что

$$g_{jm}(x) = -\frac{1}{3\omega_j}\int_0^x p(\xi)d\xi \quad (j=1,2,3; \quad m=0,1,2). \tag{8}$$

Собственные значения задачи (1), (2) определяются по формуле $\mu_\nu=\lambda_\nu^3$ где λ_ν -нули функции

$$\Delta(\lambda) = \det\left\|U_i\left[y_j(x,\lambda)\right]\right\|_{i,j=1,2,3},$$

которая с учетом асимптотического представления (7), (8) и обозначений (3), в каждом из секторов $\sum_s$ может быть представлена в виде:

$$\Delta(\lambda) = W(\alpha,\alpha,\beta,\omega)+\lambda^{-1}\Big[\omega_1^{-1}W(\hat\alpha,\alpha,\beta,\omega)+\omega_2^{-1}W(\alpha,\hat\alpha,\beta,\omega)+\omega_3^{-1}W(\alpha,\alpha,\hat\beta,\omega)+$$
$$+p\omega_3^{-1}W(\alpha,\alpha,\beta,\omega)\Big]+O(\lambda^{-2})+e^{\lambda\omega_2}\Big\{W(\alpha,\beta,\beta,\omega)+\lambda^{-1}\Big[\omega_1^{-1}W(\hat\alpha,\beta,\beta,\omega)+$$
$$+\omega_2^{-1}W(\alpha,\hat\beta,\beta,\omega)+\omega_3^{-1}W(\alpha,\beta,\hat\beta,\omega)+p(\omega_2^{-1}+\omega_3^{-1})W(\alpha,\beta,\beta,\omega)\Big]+O(\lambda^{-2})\Big\}, \tag{9}$$

где

$$p=-\frac{1}{3}\int_0^1 p(\xi)d\xi, \quad \hat\alpha=\left(\alpha_{1,k_1-1},\alpha_{2,k_2-1},\alpha_{3,k_3-1}\right),\ \hat\beta=\left(\beta_{1,k_1-1},\beta_{2,k_2-1},\beta_{3,k_3-1}\right). \tag{10}$$

Из этого представления, с учетом условия 2^0, методом последовательной подстановки получаем асимптотику для всех шести серий нулей $\Delta(\lambda)$, лежащих в секторах $\sum_s$ $(s=1,\ldots,6)$:

$$\lambda_\nu^{(s)} = \omega_2^{-1}\left[2\pi i\nu + A_s + (2\pi i\nu)^{-1} + B_s + O(\nu^{-2})\right] \quad (\nu\to(-1)^s\infty), \tag{11}$$

где

$$A_s = \ln_0\frac{W(\alpha,\alpha,\beta,\omega)}{W(\alpha,\beta,\beta,\omega)}+\pi i, \quad B_s = -p+B_s^{(1)}-B_s^{(2)},$$

$$B_s^{(1)}=\omega_2W^{-1}(\alpha,\alpha,\beta,\omega)\Big[\omega_1^{-1}W\big(\hat{\alpha},\alpha,\beta,\omega\big)+\omega_2^{-1}W\big(\alpha,\hat{\alpha},\beta,\omega\big)+\omega_3^{-1}W\big(\alpha,\alpha,\hat{\beta},\omega\big)\Big],$$

$$B_s^{(2)}=\omega_2W^{-1}(\alpha,\alpha,\beta,\omega)\Big[\omega_1^{-1}W\big(\hat{\alpha},\beta,\beta,\omega\big)+\omega_2^{-1}W\big(\alpha,\hat{\beta},\beta,\omega\big)+\omega_3^{-1}W\big(\alpha,\beta,\hat{\beta},\omega\big)\Big] \qquad (12)$$

и зависимость от s правых частей этих формул скрывается в их выражениях, которые содержат чисел $\omega_1,\omega_2,\omega_3$, по разному определенных в секторах $\sum_s$. Ниже мы, используя определения (6) чисел ω_k и свойства (5) определителей W, выявим структуру этой зависимости.

Лемма 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$A_1=A_3=A_5=A_0=\ln_0\frac{W_0(\alpha,\alpha,\beta)}{W_0(\alpha,\beta,\beta)}+\pi i,$$

$$A_2=A_4=A_6=\frac{4}{3}(k_1+k_2+k_3)\pi i+A_0,$$

$$B_1^{(1)}=B_3^{(1)}=B_5^{(1)}=B_0^{(1)}=W_0^{-1}(\alpha,\alpha,\beta)\Big[\varepsilon_1W_0(\alpha,\hat{\alpha},\beta)+\varepsilon_2W_0(\hat{\alpha},\alpha,\beta)+\varepsilon_3W_0(\alpha,\alpha,\hat{\beta})\Big],$$

$$B_2^{(1)}=B_4^{(1)}=B_6^{(1)}=\varepsilon_3B_0^{(1)},$$

$$B_1^{(2)}=B_3^{(2)}=B_5^{(2)}=B_0^{(2)}=W_0^{-1}(\alpha,\beta,\beta)\Big[\varepsilon_1W_0(\alpha,\hat{\beta},\beta)+\varepsilon_2W_0(\hat{\alpha},\beta,\beta)+\varepsilon_3W_0(\alpha,\beta,\hat{\beta})\Big],$$

$$B_2^{(2)}=B_4^{(2)}=B_6^{(2)}=\varepsilon_2B_0^{(2)}. \qquad (13)$$

Доказательство. Равенства $A_3=A_0$, $B_3^{(1)}=B_0^{(1)}$ и $B_3^{(2)}=B_0^{(2)}$ очевидны. Чтобы доказать остальные равенства условимся определитель $W(a,b,c,\omega)$, соответствующий нумерации чисел ω_k в секторе $\sum_s$, обозначить через $W_s(a,b,c,\omega)$. Тогда, в силу (6), имеем:

$$\begin{aligned}
&W_1(a,b,c,\omega)=W_3(c,a,b,\omega),\\
&W_5(a,b,c,\omega)=W_3(b,c,a,\omega),\\
&W_2(a,b,c,\omega)=W_6(c,a,b,\omega),\\
&W_4(a,b,c,\omega)=W_6(b,c,a,\omega),\\
&W_6(a,b,c,\omega)=-W_3(c,b,a,\omega).
\end{aligned} \qquad (14)$$

С другой стороны, пользуясь леммой 1, получаем:

$$W_3(c,a,b,\omega)=\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{k_1+k_2+k_3}W_3(a,b,c,\omega)=\varepsilon_2^{k_1+k_2+k_3}W_3(a,b,c,\omega),$$

$$W_3(b,c,a,\omega)=\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right)^{k_1+k_2+k_3}W_3(a,b,c,\omega)=\varepsilon_3^{k_1+k_2+k_3}W_3(a,b,c,\omega) \qquad (15)$$

Все оставшиеся равенства из (13) легко получаются из определений (12) чисел $A_s,B_s^{(1)},B_s^{(2)}$, если в них учесть (14), (15).

Теперь, имея в виду, что с.з. получаются из чисел (11) возведением в куб, можем сформулировать основное утверждение настоящей работы:

Теорема. *Пусть выполняются условия 1^0, 2^0. Тогда задача (1) ,(2) имеет счетное множество собственных значений, которое может быть разбито на две серии, имеющие асимптотические представления:*

$$\mu_\nu^{(1)}=-8\pi^3i\nu^3-12A_0\pi^2\nu^2+6\Big[A_0+B_0^{(1)}-B_0^{(2)}-p\Big]\pi i\nu+O(1)\quad(\nu\to-\infty), \qquad (16)$$

$$\mu_\nu^{(2)} = -8\pi^3 i\nu^3 - 12\left[A_0 + \frac{4}{3}(k_1 + k_2 + k_3)\pi i\right]\pi^2\nu^2 +$$

$$+6\left[A_0 + \frac{4}{3}(k_1 + k_2 + k_3)\pi i + \varepsilon_3 B_0^{(1)} - \varepsilon_2 B_0^{(2)} - p\right]\pi i\nu + O(1) \quad (\nu \to +\infty), \tag{17}$$

где $k_j\ (j = 1,2,3)$ *– порядки наивысших производных в граничных условиях (2),* $\varepsilon_j = \exp\left(\frac{2\pi j}{3} i\right)\ (j = 2,3)$, *а числа* $p, A_0, B_0^{(1)}, B_0^{(2)}$ *определены в формулах (10), (13) непосредственно через коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2).*

Литература

[1]. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы*, М. Наука, 1969, 526 с.
[2]. Расулов М.Л. *Метод контурного интеграла*, М. «Наука», 1964, 462 с.

Məmmədov Y.Ə., Hüseynova L.M.