УДК 517.96

МУСАЕВ Б.И., ХАЛИЛОВ Э.Г.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦИИ

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ - замкнутая поверхность Ляпунова,

$$\Phi_k(x,y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y,$$

$k \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел), $\operatorname{Im} k \geq 0$, $\mu \neq 0$ – произвольное вещественное число, причем $\mu \operatorname{Re} k \geq 0$, $\rho \in C(S)$ ($C(S)$ – пространство непрерывных на S функций с нормой $\|\rho\|_\infty = \max_{x\in S}|\rho(x)|$), $\vec{n}_y$ – единичная внешняя нормаль в точке $y \in S$. Разыскивая решение внешной краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоев

$$v(x) = \int_S \left(\frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}_y} - i\mu\Phi_k(x,y) \right) \rho(y)d\sigma_y, \tag{1}$$

в [2] показано, что плотность $\rho(x)$ является решением двумерного интегрального уравнения

$$\rho + K\rho - i\mu S\rho = 2f, \tag{2}$$

где f- заданная непрерывная функция на S. Здесь $K - i\mu S : C(S) \to C(S)$ линейный компактный оператор:

$$(K\rho)(x) = 2\int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}_y} \rho(y)d\sigma_y, \quad x \in S \tag{3}$$

и

$$(S\rho)(x) = 2\int_S \Phi_k(x,y)\rho(y)d\sigma_y, \quad x \in S. \tag{4}$$

В работе дается обоснование метода коллокации для приближенного решения граничного интегрального уравнения (ГИУ) (2). При этом для интегралов (3) и (4) строятся кубатурные формулы (кб.ф.)и находятся их оценки погрешности.

Построим последовательность разбиений поверхности S. Для этого введем последовательность $\{h\} \subset \mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ значений параметра дискретизации h, стремящуюся к нулю. Разобьем S на «регулярные» элементарные области: $S = \bigcup_{l=1}^{N(h)} S_l^h$. Под «регулярной» элементарной областью условимся понимать множество точек подчиненных следующим требованиям:

$(S1)$ $\forall\, l \in \{1,2,\ldots,N(h)\}$ S_l^h – замкнуто и его множество внутренних относительно S точек $\overset{\circ}{S}{}_l^h$ непусто, причем $mes\, \overset{\circ}{S}{}_l^h = mes S_l^h$ и при $j \in \{1,2,\ldots,N(h)\}$, $j \neq l$, $\overset{\circ}{S}{}_l^h \cap \overset{\circ}{S}{}_j^h = \varnothing$;

$(S2)\ \forall l \in \{1,2,\ldots,N(h)\}$ S_l^h представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

$(S3)\ \forall l \in \{1,2,\ldots,N(h)\}$ $diam S_l^h \le h$;

$(S4)\ \forall l \in \{1,2,\ldots,N(h)\}$ существует такая точка $x_l \in S_l^h$ (опорная точка), что

(4_1) $r_l(h) \approx R_l(h)^{*)}$, где $r_l(h) = \inf_{x \in \partial S_l^h} |x - x_l|$, $R_l(h) = \sup_{x \in \partial S_l^h} |x - x_l|$;

(4_2) $R_l(h) \le d$, где d-радиус стандартной сферы для S (см.[5]);

$(4_3)\ \forall j \in \{1,2,\ldots,N(h)\}, j \ne l, r_j(h) \approx r_l(h)$.

Очевидно, что

$(K\rho)(x) = (\overline{K}\rho)(x) + \rho(x)F(x),\ \ x \in S,$

где

$$(\overline{K}\rho)(x) = 2\int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}_y}(\rho(y) - \rho(x))d\sigma_y, \quad x \in S \tag{5}$$

и

$$F(x) = 2\int_S \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \vec{n}_y} d\sigma_y, \quad x \in S. \tag{6}$$

Выражения

$$(\overline{K}^{N(h)}\rho)(x_l) = \sum_{j=1}^{N(h)} a_{lj}(\rho(x_j) - \rho(x_l)), \tag{7}$$

$$F^{N(h)}(x_l) = \sum_{j=1}^{N(h)} a_{lj} \tag{8}$$

и

$$\left(S^{N(h)}\rho\right)(x_l) = \sum_{j=1}^{N(h)} b_{lj}\rho(x_j), \tag{9}$$

где

$$a_{lj} = \begin{cases} 2\dfrac{\partial \Phi_k(x_l,x_j)}{\partial \vec{n}_{x_l}} mes S_j^h, & при \quad j \ne l \\ 0, & при \quad j = l, \end{cases}$$

$$b_{lj} = \begin{cases} 2\Phi_k(x_l,x_j) mes S_j^h, & при \quad j \ne l \\ 0, & при \quad j = l, \end{cases}$$

соответственно принимается за кб.ф. для интегралов (5), (6) и (4) в точках $x_l, l = \overline{1, N(h)}$.

Для оценки погрешностей построенных кб.ф. введем следующие характеристики плотности $\rho(x)$ и поверхности S (см.[8]):

$$\overline{\omega}_\rho(\delta) = \max_{|x-y| \le \delta} |\rho(x) - \rho(y)|, \quad \delta > 0,$$

$$\omega_\rho(\delta) = \delta \sup_{\tau \ge \delta} \frac{\overline{\omega}_\rho(\tau)}{\tau}, \quad \delta > 0;$$

$^{*)}$ $a(h) \approx b(h) \Leftrightarrow C_1 \le \dfrac{a(h)}{b(h)} \le C_2$, где C_1 и C_2 положительные постоянные, не зависящие от h.

$$\overline{\omega}_S(\delta)=\max_{|x-y|\le\delta}\left|\vec{n}_x-\vec{n}_y\right|,\quad \delta>0,$$

$$\omega_S(\delta)=\delta\sup_{\tau\ge\delta}\frac{\overline{\omega}_S(\tau)}{\tau},\quad \delta>0.$$

Функция $\omega_\rho(\delta)$ не убывает, $\delta^{-1}\omega_\rho(\delta)$ не возрастает, $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_\rho(\delta)=0$, $\omega_\rho(\delta)$- полуаддитивна и $\omega_\rho(\lambda\delta)\le(\lambda+1)\omega_\rho(\delta),\quad \forall\lambda\in\mathbb{R}_+$. Аналогичными свойствами обладает $\omega_S(\delta)$.

Пусть $S_d(x)$ и $\Gamma_d(x)$-части соответственно поверхности S и касательной плоскости $\Gamma(x)$ в точке $x\in S$, заключенные внутри сферы $B_d(x)$.

Пусть $\tilde{y}\in\Gamma(x)$ - проекция точки $y\in S$. Тогда (см.[3]) $|x-\tilde{y}|\le|x-y|\le C_1(S)|x-\tilde{y}|$ и $mesS_d(x)\le C_2(S)mes\Gamma_d(x),\quad x\in S,$ где постоянные $C_1(S)$ и $C_2(S)$ зависить только от S.

Лемма 1. [3]. $\exists C_0^1>0, C_1^1>0, \forall x_l\in S_l^h, \forall x\in S_j^h,\qquad j,l\in\{1,2,\ldots,N(h)\}, j\ne l,$

$$C_0^1|x_l-x|\le|x_l-x_j|\le C_1^1|x_l-x|,$$

где постоянные C_0^1 и C_1^1 не зависят от h.

Пусть $r(h)=\min\limits_{l=1,N(h)}r_l(h),\ R(h)=\max\limits_{l=1,N(h)}R_l(h)$.

Кроме того, учитывая (см.[8]), что

$$\frac{\partial\Phi_k(x,y)}{\partial\vec{n}_y}=-\frac{\cos\alpha(\vec{xy},\vec{n}_y)}{4\pi|x-y|^2}(1-ik|x-y|)\exp(ik|x-y|),\forall x,y\in\mathbb{R}^3, x\ne y,$$

$$\left|\cos\alpha(x\vec{y},\vec{n}_y)\right|\le 7\omega_S(|x-y|),\quad \forall x,y\in S,$$

$$\left|(1-ik|x-y|)\exp(ik|x-y|)\right|\le M^{**)},\forall x,y\in S,$$

$$\left|(1-ik|x-y|)\exp(ik|x-y|)-1\right|\le C|x-y|,\ \forall x,y\in S,$$

где $\alpha(\vec{x}y,\vec{n}_y)$ – угол между векторами $\vec{x}y$ и $\vec{n}_y$, а $C>0$ постоянная, зависящая лишь от k, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть S—замкнутая поверхность Ляпунова. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{l=1,N(h)}\left|(\overline{K}\rho)(x_l)-(\overline{K}^{N(h)}\rho)(x_l)\right|\le M\left(\int_0^{R(h)}\frac{\omega_\rho(\tau)\omega_S(\tau)}{\tau}d\tau+R(h)\int_{r(h)/C_1(S)}^{diamS}\frac{\omega_\rho(\tau)\omega_S(\tau)}{\tau^2}d\tau+\right.$$
$$\left.+\omega_S(R(h))\int_{r(h)/C_1(S)}^{diamS}\frac{\omega_\rho(\tau)}{\tau}d\tau+\omega_\rho(R(h))\int_{r(h)/C_1(S)}^{diamS}\frac{\omega_S(\tau)}{\tau}d\tau\right).$$

Теорема 2. *Пусть S-замкнутая поверхность Ляпунова. Тогда справедлива оценка*

**) Здесь и всюду ниже через M обозначены положительные постоянные, зависящие лищь от S и k, разные в различных неравенствах.

$$\max_{l=1,N(h)}\left|F(x_l)-F^{N(h)}(x_l)\right|\le M\left(\int_0^{R(h)}\frac{\omega_S(\tau)}{\tau}d\tau+R(h)\int_{r(h)/C_1(S)}^{diamS}\frac{\omega_S(\tau)}{\tau^2}d\tau+\right.$$
$$\left.+\omega_S(R(h))\ln\frac{C_1(S)diamS}{r(h)}\right).$$

Теорема 3. *Пусть S- замкнутая поверхность Ляпунова. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{l=1,N(h)}\left|(S\rho)(x_l)-(S^{N(h)}\rho)(x_l)\right|\le M\left(\omega_\rho(R(h))+\|\rho\|_\infty R(h)\ln\frac{C_1(S)diamS}{r(h)}\right).$$

Очевидно, что выражение

$$(K^{N(h)}\rho)(x_l)=\sum_{j=1}^{N(h)}a_{lj}\rho(x_j) \tag{10}$$

принимается за кб.ф. для интеграла (3) в точках $x_l, l=\overline{1,N(h)}$. Отметим, что погрешность кб. ф. (10) оценивается с помощью теорем 1-2.

Теперь дадим обоснование метода коллокации. Обозначим через $\mathbb{C}^{N(h)}$ пространство $N(h)$-мерных векторов $\omega^{N(h)}=(\omega_1,\dots,\omega_{N(h)}), \omega_l\in\mathbb{C}, l=\overline{1,N(h)}$, с нормой $\left\|\omega^{N(h)}\right\|=\max_{l=1,N(h)}|\omega_l|$.

Для $\omega^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ положим

$$K_l^{N(h)}\omega^{N(h)}=\sum_{j=1}^{N(h)}a_{lj}\omega_j,\quad l=\overline{1,N(h)}, \tag{11}$$

$$S_l^{N(h)}\omega^{N(h)}=\sum_{j=1}^{N(h)}b_{lj}\omega_j,\quad l=\overline{1,N(h)}, \tag{12}$$

$$K^{N(h)}\omega^{N(h)}=(K_1^{N(h)}\omega^{N(h)},\dots,K_{N(h)}^{N(h)}\omega^{N(h)}),$$

$$S^{N(h)}\omega^{N(h)}=\left(S_1^{N(h)}\omega^{N(h)},\dots,S_{N(h)}^{N(h)}\omega^{N(h)}\right),$$

$$K^{N(h)}=(K_1^{N(h)},\dots,K_{N(h)}^{N(h)}),$$

$$S^{N(h)}=\left(S_1^{N(h)},\dots,S_{N(h)}^{N(h)}\right).$$

Согласно методу коллокации ГИУ (2) с использованием кб.ф.(9) и (10) заменяется системой алгебраических уравнений относительно ω_l приближенных значений $\rho(x_l), l=\overline{1,N(h)}$, которую запишем в следующем операторном виде:

$$\omega^{N(h)}+L^{N(h)}\omega^{N(h)}=2f^{N(h)}, \tag{13}$$

где $L^{N(h)}=K^{N(h)}-i\mu S^{N(h)}$. Здесь $L^{N(h)}:\mathbb{C}^{N(h)}\to\mathbb{C}^{N(h)}$- линейный оператор, определяемый посредством формул (11) и (12)

$$L^{N(h)}\omega^{N(h)}=(K_1^{N(h)}\omega^{N(h)}-i\mu S_1^{N(h)}\omega^{N(h)},\dots,K_{N(h)}^{N(h)}\omega^{N(h)}-i\mu S_{N(h)}^{N(h)}\omega^{N(h)});$$

$$f^{N(h)}=p^{N(h)}f=(f_1,\dots,f_{N(h)});\quad f_l=f(x_l),\quad l=\overline{1,N(h)};$$

$p^{N(h)}\in L(C(S),\mathbb{C}^{N(h)})(L(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство X на банахово пространство Y)- оператор простого сноса.

Обоснование метода коллокации получим из теоремы Вайникко Г.М. о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [1]).Для ее формулировки приведем в обозначениях этой статьи необходимые определения и предложение.

Определение 1. *Систему* $\mathcal{P}=\{p^{N(h)}\}$, $N(h)=1,2,\ldots$, *операторов* $p^{N(h)}:C(S)\to\mathbb{C}^{N(h)}$ *называют связывающей для* $C(S)$ *и* $\mathbb{C}^{N(h)}$, $N(h)=1,2,\ldots$, *если при* $h\to0$ $\|p^{N(h)}u\|\to\|u\|_\infty$, $\forall u\in C(S)$ *и* $\|p^{N(h)}(au+a'u')-(ap^{N(h)}u+a'p^{N(h)}u')\|\to0$, $\forall u,u'\in C(S)$, $\forall a,a'\in\mathbb{C}$.

Определение 2. *Последовательность* $\{u^{N(h)}\}$, $N(h)=1,2,\ldots$, *элементов* $u^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ $\mathcal{P}$*-сходится к* $u\in C(S)$, *если* $\|u^{N(h)}-p^{N(h)}u\|\to0$ *при* $h\to0$ *и обозначается* $u^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}}u$.

Определение 3. *Последовательность* $\{u^{N(h)}\}$, $N(h)=1,2,\ldots$, *элементов* $u^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ $\mathcal{P}$*-компактна, если любая ее подпоследовательность содержит* $\mathcal{P}$*-сходящуюся подпоследовательность.*

Предложение 1. *Пусть* $p^{N(h)}:C(S)\to\mathbb{C}^{N(h)}$, $N(h)=1,2,\ldots$, *линейны и ограничены, тогда следующие условия равносильны:*

(*) последовательность $\{u^{N(h)}\}$ $\mathcal{P}$*-компактна;*

(**) $\exists\{u_{N(h)}\}\subset C(S)$ *относительно компактная последовательность, такая, что* $\|u^{N(h)}-p^{N(h)}u_{N(h)}\|\to0$ *при* $h\to0$.

Определение 4. *Последовательность операторов* $A^{N(h)}\in L(\mathbb{C}^{N(h)},\mathbb{C}^{N(h)})$ $\mathcal{PP}$*-сходится к оператору* $A\in L(C(S),C(S))$, *если* $u^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}}u$ *при* $h\to0\Rightarrow A^{N(h)}u^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}}Au$ *при* $h\to0$; *и компактно сходится, если* $A^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{PP}}A$ *и выполнено условие компактности:*
$\forall u^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$, $\|u^{N(h)}\|\le C=const$ $(N(h)=1,2,..)\Rightarrow$ *последовательность* $\{A^{N(h)}u^{N(h)}\}$, $N(h)=1,2,\ldots$, $\mathcal{P}$*-компактна.*

Итак, сформулируем применительно к уравнениям (2) и (13) основную теорему из [1].

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(а) $L^{N(h)}\to L$ *компактно, где* $L=K-i\mu S$;

(б) $I^{N(h)}+L^{N(h)}$ $(N(h)\ge n_0)$ *фредгольмовы с нулевым индексом, где* $I^{N(h)}$ *– единичный оператор в* $\mathbb{C}^{N(h)}$;

(в) $N(I+L)\equiv\{\rho\in C(S):\rho+L\rho=0\}=\{0\}$, *где* I *-единичный оператор в* $C(S)$;

(г) $f^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}}f$ *при* $h\to0$.

Тогда уравнения (2) и (13) имеют единственные решения $\rho_*\in C(S)$ *и* $\omega_*^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ *(при достаточно больших* $N(h)\ge n_0$*), причем справедлива оценка*

$$C_1\delta_{N(h)}\le\|\omega_*^{N(h)}-p^{N(h)}\rho_*\|\le C_2\delta_{N(h)},$$

где

$$C_1=\left(\sup_{N(h)\ge n_0}\|I^{N(h)}+L^{N(h)}\|\right)^{-1}>0,$$

$$C_2=\sup_{N(h)\ge n_0}\left\|\left(I^{N(h)}+L^{N(h)}\right)^{-1}\right\|<\infty,$$

Определение 1. *Систему* $\mathcal{P}=\left\{p^{N(h)}\right\}, N(h)=1,2,\ldots,$ *операторов* $p^{N(h)}: C(S)\to \mathbb{C}^{N(h)}$ *называют связывающей для* $C(S)$ *и* $\mathbb{C}^{N(h)}$, $N(h)=1,2,\ldots,$ *если при* $h\to 0$ $\left\|p^{N(h)}u\right\|\to\|u\|_\infty$, $\forall u\in C(S)$ *и* $\left\|p^{N(h)}(au+a'u')-\left(ap^{N(h)}u+a'p^{N(h)}u'\right)\right\|\to 0$, $\forall u,u'\in C(S), \forall a,a'\in\mathbb{C}$.

Определение 2. *Последовательность* $\left\{u^{N(h)}\right\}$, $N(h)=1,2,\ldots,$ *элементов* $u^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ $\mathcal{P}$*-сходится к* $u\in C(S)$, *если* $\left\|u^{N(h)}-p^{N(h)}u\right\|\to 0$ *при* $h\to 0$ *и обозначается* $u^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}} u$.

Определение 3. *Последовательность* $\left\{u^{N(h)}\right\}$, $N(h)=1,2,\ldots,$ *элементов* $u^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ $\mathcal{P}$*-компактна, если любая ее подпоследовательность содержит* $\mathcal{P}$*-сходящуюся подпоследовательность.*

Предложение 1. *Пусть* $p^{N(h)}: C(S)\to\mathbb{C}^{N(h)}$, $N(h)=1,2,\ldots,$ *линейны и ограничены, тогда следующие условия равносильны:*

(*) последовательность $\left\{u^{N(h)}\right\}$ $\mathcal{P}$*-компактна;*

(**) $\exists\left\{u_{N(h)}\right\}\subset C(S)$ *относительно компактная последовательность, такая, что* $\left\|u^{N(h)}-p^{N(h)}u_{N(h)}\right\|\to 0$ *при* $h\to 0$.

Определение 4. *Последовательность операторов* $A^{N(h)}\in L(\mathbb{C}^{N(h)},\mathbb{C}^{N(h)})$ $\mathcal{PP}$*-сходится к оператору* $A\in L(C(S),C(S))$, *если* $u^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}} u$ *при* $h\to 0 \Rightarrow A^{N(h)}u^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}} Au$ *при* $h\to 0$; *и компактно сходится, если* $A^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{PP}} A$ *и выполнено условие компактности:*

$\forall u^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$, $\left\|u^{N(h)}\right\|\le C=const$ $(N(h)=1,2,..)\Rightarrow$ *последовательность* $\left\{A^{N(h)}u^{N(h)}\right\}$, $N(h)=1,2,\ldots,$ $\mathcal{P}$*-компактна.*

Итак, сформулируем применительно к уравнениям (2) и (13) основную теорему из [1].

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

(а) $L^{N(h)}\to L$ *компактно, где* $L=K-i\mu S$;

(б) $I^{N(h)}+L^{N(h)}(N(h)\ge n_0)$ *фредгольмовы с нулевым индексом, где* $I^{N(h)}$ – *единичный оператор в* $\mathbb{C}^{N(h)}$;

(в) $N(I+L)\equiv\left\{\rho\in C(S): \rho+L\rho=0\right\}=\{0\}$, *где* I *-единичный оператор в* $C(S)$;

(г) $f^{N(h)}\xrightarrow{\mathcal{P}} f$ *при* $h\to 0$.

Тогда уравнения (2) и (13) имеют единственные решения $\rho_*\in C(S)$ *и* $\omega_*^{N(h)}\in\mathbb{C}^{N(h)}$ *(при достаточно больших* $N(h)\ge n_0$*), причем справедлива оценка*

$$C_1\delta_{N(h)}\le\left\|\omega_*^{N(h)}-p^{N(h)}\rho_*\right\|\le C_2\delta_{N(h)},$$

где

$$C_1=\left(\sup_{N(h)\ge n_0}\left\|I^{N(h)}+L^{N(h)}\right\|\right)^{-1}>0,$$

$$C_2=\sup_{N(h)\ge n_0}\left\|\left(I^{N(h)}+L^{N(h)}\right)^{-1}\right\|<\infty,$$

$$\delta_{N(h)} = \left\| \left(I^{N(h)} + L^{N(h)}\right)\left(p^{N(h)}\rho_*\right) - 2f^{N(h)} \right\|.$$

Проверим выполнимость условий теоремы.

(а) Из теорем 1-3 вытекает, что

$\left\| p^{N(h)}(L\rho) - L^{N(h)}(p^{N(h)}\rho) \right\| \to 0$ при $h \to 0, \forall \rho \in C(S)$, т. е. $L^{N(h)} \xrightarrow{pp} L$. По определению 4 осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1 равносильно условию:

$$\forall \omega^{N(h)} \in \mathbb{C}^{N(h)}, \quad \left\|\omega^{N(h)}\right\| \le C = const$$

существует относительно компактная последовательность $\left\{L_{N(h)}\omega^{N(h)}\right\} \subset C(S)$ такая, что

$$\left\| L^{N(h)}\omega^{N(h)} - p^{N(h)}(L_{N(h)}\omega^{N(h)}) \right\| \to 0 \quad \text{при } h \to 0.$$

Пусть $\omega^{N(h)} \in \mathbb{C}^{N(h)}$, $\left\|\omega^{N(h)}\right\| \le C = const$. В качестве $\left\{L_{N(h)}\omega^{N(h)}\right\}$ выберем последовательность

$$L_{N(h)}\omega^{N(h)} = \left(L_{N(h)}\omega^{N(h)}\right)(x) = \left(K_{N(h)}\omega^{N(h)}\right)(x) - i\mu\left(S_{N(h)}\omega^{N(h)}\right)(x), \quad x \in S,$$

где

$$\left(K_{N(h)}\omega^{N(h)}\right)(x) = \sum_{j=1}^{N(h)} \left[2(1 - ik|x - x_j|)\exp(ik|x - x_j|) \int_{S_j^\tau} \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial n_y} d\sigma_y \right] \omega_j, \quad x \in S,$$

$$\left(S_{N(h)}\omega^{N(h)}\right)(x) = \sum_{j=1}^{N(h)} \left[2\exp(ik|x - x_j|) \int_{S_j^\tau} \Phi_0(x,y) d\sigma_y \right] \omega_j, \quad x \in S$$

и

$$\Phi_0(x,y) = (\Phi_k(x,y))_{k=0} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}^3, \quad x \ne y.$$

Нетрудно можно убедится, что $\left\{L_{N(h)}\omega^{N(h)}\right\} \subset C(S)$. Кроме того, можно доказать, что

$$\left\| K^{N(h)}\omega^{N(h)} - p^{N(h)}(K_{N(h)}\omega^{N(h)}) \right\| \to 0 \text{ при } h \to 0$$

и

$$\left\| S^{N(h)}\omega^{N(h)} - p^{N(h)}(S_{N(h)}\omega^{N(h)}) \right\| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Отсюда вытекает, что $\left\| L^{N(h)}\omega^{N(h)} - p^{N(h)}(L_{N(h)}\omega^{N(h)}) \right\| \to 0$ при $h \to 0$. А относительная компактность $\left\{L_{N(h)}\omega^{N(h)}\right\}$ следует из теоремы Арцеля.

(б) $L^{N(h)} \in L\left(\mathbb{C}^{N(h)}, \mathbb{C}^{N(h)}\right)$ и потому $I^{N(h)} + L^{N(h)}$ фредгольмовы, причем

$ind(I^{N(h)} + L^{N(h)}) = \dim \mathbb{C}^{N(h)} - \dim \mathbb{C}^{N(h)} = 0.$

(в) В [2]показано, что однородное ГИУ соответственно ГИУ (2) имеет только и только тривиальное решение, т.е. $N(I + L) = \{0\}$.

(г) Выполнимость этого условия очевидно.

Итак мы доказали следующую основную теорему.

Теорема 5. *Пусть* $S \subset \mathbb{R}^3$ *– замкнутая поверхность Ляпунова. Тогда уравнения (2) и (13) имеют единственные решения* $\rho_* \in C(S)$ *и* $\omega_*^{N(h)} \in \mathbb{C}^{N(h)}$, *причем справедлива оценка*

$$C_1\delta_{N(h)} \le \left\|\omega_*^{N(h)} - p^{N(h)}\rho_*\right\| \le C_2\delta_{N(h)},$$

где

$$C_1 = \left(\sup_{N(h)}\left\|I^{N(h)} + L^{N(h)}\right\|\right)^{-1} > 0,$$

$$C_2 = \sup_{N(h)}\left\|\left(I^{N(h)} + L^{N(h)}\right)^{-1}\right\| < \infty,$$

$$\delta_{N(h)} = \max_{l=1,N(h)}\left|\left(K_l^{N(h)} - i\mu S_l^{N(h)}\right)\left(p^{N(h)}\rho_*\right) - \left(K\rho_* - i\mu S\rho_*\right)(x_l)\right|.$$

Отметим, что величина $\delta_{N(h)}$ оценивается через суммы погрешностей кб.ф. для интегралов $K\rho_*$ и $S\rho_*$.

Литература

[1]. Вайникко Г.М. *Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений* В. Об. Мат. анализ, т. 16 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)М.: 1979,с.5-54.

[2]. Колтон Д., Кресс Р. *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* М.: Мир, 1987

[3]. Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. *Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения* -Деп. в ВИНИТИ, № 4281-81, 60 с.

[4]. Махмудзаде Р.А. *Потенциал двойного слоя по гладким кривым и поверхностям в пространствах непрерывных функций*-Канд. Дис. Баку, 1981.

[5]. Михлин С.Т. *Линейные уравнения в частных производных* М.: «Высшая школа», 1977.

[6]. Панич О.И. *К вопросу разрешимости внешних краевых задач для волнового уравнения и уравнения Максвелла* - Успехи мат. наук, 1965, т. 20, № 1, с. 221-226.

[7]. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. *Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела.* Казань: Изд-во КГУ, 1986.

[8]. Халилов Э.Г. *Оценка типа оценки А.Зигмунда для оператора акустического потенциала двойного слоя и некоторые свойства этого оператора.* -Деп. в Аз НИИНТИ, № 2533-Аз, 1998, 25 с.