1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.518

НАРИМАНОВ А.Х.

B_n-СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В ПРОСТРАНСТВАХ $\Gamma^{*}_{p\theta,\gamma}\left(R^n_+,\varphi\right)$.

В пространствах локально суммируемых функций в терминах метрических характеристик $\Omega^{*}_{p,\gamma}$ устанавливается оценка, связывающая характеристику образа и прообраза B_n- сингулярного интегрального оператора. Эти оценки интересны и сами по себе и кроме того используются для изучения интегральных операторов в различных шкалах банаховых пространств, в частности, в весовых L^γ_p-пространствах.

Пусть R^n n-мерное евклидово пространства точек $x=(x_1,\ldots,x_n)=(x',x_n)$, $|x|=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $R^n_+=\left\{x\in R^n; x_n>0\right\}$, $B_r=\left\{x\in R^n_+ : |x|<r\right\}$, $B^{*}_r=\left\{x\in R^n_+ : |x|>r\right\}$, $0<r<\infty$, $S_+=\left\{x\in R^n_+ : |x|=1\right\}$, $\gamma>0$.

Пусть ω положительная измеримая на R^n_+ функция. Напомним, что пространство $L^\gamma_p\left(R^n_+,\omega\right)$, состоящее из измеримой функции f, определяется конечной нормой

$$\|f\|_{L^\gamma_p(R^n_+,\omega)}=\left(\int_{R^n_+}|f(x)|^p\omega(x)x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty .$$

Положим $L^\gamma_p\left(R^n_+\right)=L^\gamma_p\left(R^n_+,\omega\right)$ при $\omega=1$. Норму будем обозначать $\|\cdot\|_{L^\gamma_p}$.

Такие функциональные пространства (введенные в [1]) приспособлены для работы с обобщенным сдвигом вида

$$T^y f(x)=C_\gamma\int_0^\pi f\left(x'-y',\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\alpha+y_n^2}\right)\sin^{\gamma-1}\alpha d\alpha ,$$

где $C_\gamma=\pi^{-\frac{1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\gamma)}$.

Отметим, что этот сдвиг тесно связан [1] дифференциальным оператором Бесселя

$$B_n=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\frac{\gamma}{x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Пусть $K(x)$ сингулярное ядро, определенное в R^n_+ со следующими свойствами:

$$K(tx)=t^{-n-\gamma}K(x),\quad \int_{S_+}K(x)x_n^\gamma dx=0 . \tag{1}$$

Обозначим через $\omega_K(t)$ модуль непрерывности ядро K на сфере S_+:

$$\omega_K(t)=\sup\left\{\left|K(x)-K(y)\right|;\, x,y\in S_+, |x-y|\le t\right\}.$$

Будем считать, что

$$\int_0^1 \omega_K(t)\frac{dt}{t}<\infty. \tag{2}$$

Рассмотрим B_n-сингулярные интегралы следующим образом:

$$Af(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\ge\varepsilon} T^y K(x) f(y) y_n^\gamma dy,\quad \varepsilon>0. \tag{3}$$

Определение 1. *Пусть функция* $f\in L_p^\gamma(B_r)$ *при* $\forall r\in(0,\infty)$. *Положим*

$$\Omega^*_{p,\gamma}(f,r)=\left(\int_{B_r}\left|f(x)\right|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Очевидно, что $\Omega^*_{p,\gamma}(f,r)$ неотрицательный; $\Omega^*_{p,\gamma}(f,r)$ не убывает на $(0,\infty)$; $\Omega^*_{p,\gamma}(f,r)\to 0$ при $r\to 0$, если $f\in L_p^{\gamma,loc}(R_+^n)$.

Теорема 1. *Пусть* $1<p<\infty$, *ядро* K *удовлетворяется условиями (1), (2),* $f\in L_p^\gamma(B_r)$, $\forall r>0$. *Тогда при сходимости интеграла*

$$\int_1^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt$$

сингулярный интеграл (3) существует почти всюду в R_+^n *и имеет место неравенство*

$$\Omega^*_{p,\gamma}(Af,r)\le Cr^{\frac{n+\gamma}{p}}\int_r^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt, \tag{4}$$

где постоянная C *не зависит от* f.

Доказательство. Представим функцию f в виде суммы f_1+f_2, где $f_1(x)=f_2(x)\chi_{B_{2r}}(x)$, $f_2(x)=f_2(x)\chi_{B^*_{2r}}(x)$. В силу сходимости интеграла в условии теоремы и монотонности $\Omega^*_{p,\gamma}(f,r)$ функция $f\in L_p^\gamma(B_r)$ и $f_1\in L_p^\gamma(R_+^n)$, следовательно, по теореме Калдерона-Зигмунда для B_n- сингулярного интеграла [3] Af_1, существует почти всюду. Покажем, что интеграл (3) с плотностью f_2 конечно для всех $x\in B_r$. Учитывая, что из $x\in B_r, y\in B^*_{2r}$, следует $|x-y|\ge|y|-|x|\ge\frac{1}{2}|x|$, получим

$$\left|Af_2(x)\right|\le\int_{|y|\ge 2r}\left|f(y)\right|\left|T^y K(x)\right| y_n^\gamma dy\le C\int_{2r}^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt.$$

Перейдем теперь к оценке

$$\Omega^*_{p,\gamma}(Af,r)\le\Omega^*_{p,\gamma}(Af_1,r)+\Omega^*_{p,\gamma}(Af_2,r)=i_1+i_2.$$

Так как $f_1\in L_p^\gamma(R_+^n)$, следовательно в силу L_p^γ ограниченности B_n- сингулярного интеграла [3]

$$\Omega^*_{p,\gamma}(Af,r) \le \left(\int\limits_{R_n^+} \left|Af_1(x)\right|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int\limits_{R_n^+} \left|f_1(x)\right|^p x_n^\gamma dx\right)^{\frac{1}{p}} = C\Omega^*_{p,\gamma}(f,2r),$$

где постоянная C не зависит от f.

Если учесть, что

$$\Omega^*_{p,\gamma}(f,r) \le \frac{n+\gamma}{p} r^{\frac{n+\gamma}{p}} \int\limits_r^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1} \Omega^*_p(f,t)dt,$$

то получим

$$i_1 \le Cr^{\frac{n+\gamma}{p}} \int\limits_{2r}^\infty t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1} \Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt. \tag{5}$$

При $|x| \le r, |y| \ge 2r$ имеет место $|x-y| \ge |y| - |x| \ge \frac{1}{2}|y|$ тогда

$$i_2 = \left\{\int\limits_{B_r} \left|\int\limits_{B_{2r^*}} f(y) T^y K(x) y_n^\gamma dy\right|^p x_n^\gamma dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le c\left\{\int\limits_{|x|\le r} \left(\int\limits_{|y|\ge 2r} |x-y|^{-n-\gamma} \left|f(y)\right| y_n^\gamma dy\right)^p x_n^\gamma dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le c\left\{\int\limits_{|x|\le r} \left(\int\limits_{|y|\ge 2r} |y|^{-n-\gamma} \left|f(y)\right| y_n^\gamma dy\right)^p x_n^\gamma dx\right\}^{1/p} \le$$

$$\le C\left(\int\limits_{|x|\le r} x_n^\gamma dx\right)^{1/p} \int\limits_{|y|\ge 2r} |y|^{-n-\gamma} \left|f(y)\right| y_n^\gamma dy.$$

Перейдя к сферическим координатам, получим

$$\left(\int\limits_{|x|\le r} x_n^\gamma dx\right)^{1/p} = \left(\int\limits_{S^+} \int\limits_0^r r^{n+\gamma-1} \theta_n^\gamma dr d\theta\right)^{1/p} = cr^{\frac{n+\gamma}{p}}.$$

Подбирая $\alpha > \dfrac{n+\gamma}{p}$, найдем

$$\int\limits_{|y|\ge 2r} |y|^{-n-\gamma} \left|f(y)\right| y_n^\gamma dy = \int\limits_{S^+} \xi^\gamma d\sigma(\xi) \int\limits_{2r}^\infty \left|f(t\xi)\right| t^{-n-\gamma} t^{n+|\gamma|-1} dt =$$

$$= \alpha \int\limits_{S^+} \xi_n^\gamma d\xi \int\limits_{2r}^\infty \left|f(t\xi)\right| t^{-1+\alpha} dt \int\limits_t^\infty s^{-\alpha-1} ds =$$

$$= \int\limits_{S^+} \xi_n^\gamma d\xi \int\limits_{2r}^\infty s^{-\alpha-1} ds \int\limits_{2r}^s \left|f(t\xi)\right| t^{\frac{n+\gamma-1}{p}} t^{\frac{n+\gamma-1}{p'}++\alpha-n-|\gamma|} dt \le$$

$$\le \alpha \int\limits_{S^+} \xi_n^\gamma d\xi \int\limits_{2r}^\infty s^{-\alpha-1} ds \left(\int\limits_{2r}^s \left|f(t\xi)^p t^{n+\gamma-1} dt\right|\right)^{1/p} \times$$

$$\times\left(\int_{2r}^{s} t^{n+\gamma-1+(+\alpha-n-\gamma)p'}dt\right)^{1/p'} \le$$

$$\le C\int_{S^+}\xi_n^{\gamma}d\xi\int_{2r}^{\infty} s^{-\alpha-1+\frac{n+|\gamma|}{p'}++\alpha-n-\gamma}\left(\int_{2r}^{s}\left|f(t\xi)\right|^p t^{n+\gamma-1}dt\right)^{1/p}ds =$$

$$\le C\int_{2r}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}ds\int_{S_+}\xi_n^{\gamma}d\xi\left(\int_{2r}^{s}\left|f(t\xi)\right|^p t^{n+\gamma-1}dt\right)^{1/p} \le$$

$$\le C\int_{2r}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}ds\left(\int_{S_+}\xi_n^{\gamma}d\xi\int_{2r}^{s}\left|f(t\xi)\right|^p t^{n+\gamma-1}dt\right)^{1/p} =$$

$$= C\int_{2r}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\left(\int_{2r\le|y|\le s}\left|f(y)\right|^p dy\right)^{1/p}ds \le C\int_{2r}^{\infty} s^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,s)ds.$$

Значит

$$\int_{|y|\ge 2r}\left|f(y)\right|y_n^{\gamma}dy \le C\int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt.$$

Следовательно

$$i_2 \le C r^{\frac{n+\gamma}{p}}\int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p}(f,t)dt. \qquad (6)$$

Из (5) и (6) получим, что

$$\Omega^*_{p,\gamma}(Af,r) \le C r^{\frac{n+\gamma}{p}}\int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n+\gamma}{p}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt,$$

где постоянная C не зависит от f.

Теорема 1 доказана.

Пусть φ положительная измеримая на $(0,\infty)$ функция. Обозначим $\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)$, $1 \le p < \infty$, множество измеримых в R^n_+ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)} = \left(\int_0^{\infty}\left(\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)\right)^{\theta}\varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)} = \sup_{t>0}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)\varphi(t), \quad \theta = \infty.$$

Отметим, что $\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)$ банахово пространство.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \theta_1 < \infty$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$- положительные измеримые функции на $(0,\infty)$ и ядро K удовлетворяется условиями (1), (2). Пусть также $f \in \Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)$.*

Тогда если

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^{\infty}\psi(r)r^{-\frac{(n+\gamma)\theta_1}{p}}dr\right)^{\theta/\theta_1}\left(\int_0^{t}\varphi(r)^{1-\theta'}r^{-(n+\gamma)\left(1+\frac{\theta'}{p}\right)}dr\right)^{\theta-1} < \infty,$$

то

$$\|Af\|_{\Gamma^*_{p\theta_1,\gamma}(R^n_+,\psi)} \le C\|f\|_{\Gamma^*_{p\theta_1,\gamma}(R^n_+,\varphi)}$$

с постоянной C, *независящей от* f.

Доказательство. Пусть $f \in \Gamma^*_{p\theta,\gamma}\left(R^n_+,\varphi\right)$. В силу (4) имеем

$$\|Af\|_{\Gamma^*_{p\theta_1,\gamma}(R^n_+,\psi)} = \left\{\int_0^\infty \left(\Omega^*_{p,\gamma}(Af,r)\right)^{\theta_1}\psi(r)dr\right\}^{1/\theta_1} \le$$

$$\le C\left\{\int_0^\infty \psi(r)r^{\frac{(n+|\gamma|)\theta_1}{p'}}\left(\int_r^\infty t^{-\frac{n+|\gamma|}{q}-1}\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)dt\right)^{\theta_1}dr\right\}^{1/\theta_1} \le$$

$$\le C\left\{\int_0^\infty t^{-\frac{(n+|\gamma|)\theta}{q}-\theta}\left(\Omega^*_{p,\gamma}(f,t)\right)^{\theta}\varphi(t)t^{\frac{(n+|\gamma|)\theta}{q}+\theta}dt\right\}^{1/\theta} = C\|f\|_{\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $1<p<\infty$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$- *положительные измеримые функции на* $(0,\infty)$ *и ядро* K *удовлетворяется условиями (1), (2).*

Если

$$r^{\frac{n+\gamma}{p}}\int_0^r t^{\frac{n+\gamma}{p}-1}\frac{dt}{\varphi(t)} \le \frac{C}{\psi(r)},$$

то для интеграла (3) имеет место неравенство

$$\|Af\|_{\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\psi)} \le C\|f\|_{\Gamma^*_{p\theta,\gamma}(R^n_+,\varphi)}$$

с постоянной C *не зависящей от* r.

Я выражаю признательность моему научному руководителю профессору В.С. Гулиеву за постановку задачи и постоянное внимание за ходом исследований.

Литература

[1]. Левитан Б.М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье.* УМН, 1951, т.6, №2, стр. 102-143.

[2]. Гулиев В.С. *Теорема Соболева для B-потенциалов Рисса.* Докл.РАН, 1998; т.358, №4, стр. 450-451.

[3]. Киприянов И.А., Ключанцев М.И. *О сингулярных интегралах, порожденных оператором обобщенного сдвига.* СМЖ, 1970, т.11, №5, стр.1060-1083.

Nərimanov A.X.

$\Gamma^*_{p\theta,\gamma}\left(R^n_+,\varphi\right)$ FƏZASINDA B_n-SİNQULYAR İNTEQRALLAR

İşdə xarakteristik terminlərdə $\Gamma^*_{p\theta,\gamma}\left(R^n_+,\varphi\right)$ fəzasında B_n-sinqulyar inteqralın be`zi xassələri öyrənilmişdir. $\Gamma^*_{p\theta,\gamma}\left(R^n_+,\varphi\right)$ fəzasında B_n-sinqulyar inteqrallar üçün məhdudluq teoremləri isbat edilmişdir.