1998 ТОМ IX(XVII)

УДК 517.97

САДЫГОВ М.А.

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ТИПА ГУРСА-ДАРБУ

Работа состоит из трех параграфов. В §1 получены необходимые и достаточные условия экстремума выпуклых вариационных задач заданных на множестве абсолютно непрерывных функций. В основном изучен случай, когда оптимальное решение не является внутренним. В §2 получены необходимые и достаточные условия минимума для дифференциальных включений. Выпуклый случай легко приводится к выпуклым вариационным задачам. В работе рассматривается невыпуклая экстремальная задача для дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. В §3 дано другое определение субдифференциала второго порядка и с его помощью получены необходимые условия экстремума.

Экстремальные задачи для многомерных дифференциальных включений рассмотрены также в работах [1-5], автора.

§1. О минимизации двумерных вариационных задач.

Двух переменная функция $u(\cdot)$ называется абсолютно непрерывным в $[0,T]\times[0,S]$, если представляется в виде

$$u(t,s)=u(0,0)+\int_0^t x(\tau)d\tau+\int_0^s y(\nu)d\nu+\int_0^t\int_0^s z(\tau,\nu)d\tau d\nu,$$

где $x(\cdot)\in L_1^n[0,T]$, $y(\cdot)\in L_1^n[0,S]$, $z(\cdot)\in L_1^n([0,T]\times[0,S])$. Множество всех абсолютно непрерывных функций определенных в $[0,T]\times[0,S]$ с нормой

$$\|u(\cdot)\|=|u(0,0)|+\int_0^T|x(\tau)|d\tau+\int_0^S|y(\nu)|d\nu+\int_0^T\int_0^S|z(\tau,\nu)|d\tau d\nu$$

обозначим через $A^n([0,T]\times[0,S])$. Легко проверяется, что любой линейный непрерывный функционал ϑ^* на $A^n([0,T]\times[0,S])$ можно представить в виде

$$\vartheta^*(u)=(u(0,0)|c)+\int_0^T(u_t(t,0)|a(t))dt+\int_0^S(u_s(0,s)|b(s))ds+\int_0^T\int_0^S(u_{ts}(t,s)|\vartheta(t,s))dtds,$$

где $c\in R^n$, $a(\cdot)\in L_\infty^n[0,T]$, $b(\cdot)\in L_\infty^n[0,S]$, $\vartheta(\cdot)\in L_\infty^n([0,T]\times[0,S])$. Функционал ϑ^* в дальнейшем обозначается символом $(c,a(\cdot),b(\cdot),\vartheta(\cdot))$.

Множество $A^n([0,T]\times[0,S])$ с нормой $\|u\|=\max_{t,s}\|u(t,s)\|$ обозначим через $A_c^n([0,T]\times[0,S])$. Ясно, что $A_c^n([0,T]\times[0,S])^*\subset A^n([0,T]\times[0,S])^*$.

Пусть $g:[0,T]\times[0,S]\times R^n \to \overline{R} = RU\{+\infty\}$, $\psi_1:[0,T]\times R^n \to \overline{R}$, $\psi_2:[0,S]\times R^n \to \overline{R}$ измеримые интегранты, $q:R^{4n}\to\overline{R}$. Рассмотрим субдифференцируемость функционала

$$J_1(u)=\int_0^T\int_0^S g(t,s,u(t,s))dtds+\int_0^T \psi_1(t,u(t,0))dt+\int_0^S \psi_2(s,u(0,s))ds+$$
$$+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))$$

в пространстве $A^n([0,T]\times[0,S])$. Положим $Q=\{u(\cdot)\in A^n([0,T]\times[0,S]):$

$:\int_0^T\int_0^S g(t,s,u(t,s))dtds<+\infty\}$, $Q_1=\left\{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]:\int_0^T \psi_1(t,x(t))dt<+\infty\right\}$,

$Q_2=\left\{y(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]:\int_0^S \psi_2(s,y(s))ds<+\infty\right\}$.

Лемма 1. *Если для* $P_1(\cdot)\in L_\infty[0,T]$, $P_2(\cdot)\in L_\infty[0,S]$ *и* $P(\cdot)\in L_\infty([0,T]\times\times[0,S])$

$$\sup\left\{\int_0^T (u_t(t,0)|P_1(t))dt+\int_0^S (u_s(0,s)|P_2(s))ds+\int_0^T\int_0^S (u_{ts}(t,s)|P(t,s))dtds : u\in A_\Phi\right\}<+\infty,$$

где $A_\Phi=\{u\in A^1([0,T]\times[0,S]):u(0,0)=a_1, u(T,0)=a_2, u(0,S)=a_3, u(T,S)=a_4\}$, a_1, a_2, a_3, $a_4\in R$, *то* $P_1(t)=const$, $P_2(s)=const$, $P(t,s)=const$.

Лемма 2. *Если* $F(u)=q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))$ *и* $F^*(\vartheta^*)<+\infty$, *где* $\vartheta^*=(c,a(\cdot),b(\cdot),\vartheta(\cdot))$, *то* $a(t)=d_1\in R^n$, $b(s)=d_2\in R^n$, $\vartheta(t,s)=d\in R^n$ *и*

$$F^*(\vartheta^*)=q^*(c-d_1-d_2+d, d_1-d, d_2-d, d).$$

Лемма 3. *Если* $F_1(u)=\int_0^T \psi_1(t,u(t,0))dt$, $F_2(u)=\int_0^S \psi_2(s,u(0,s))ds$ *и* $\vartheta_1^*=(c_1,a_1(\cdot),b_1(\cdot),\vartheta_1(\cdot))$, $\vartheta_2^*=(c_2,a_2(\cdot),b_2(\cdot),\vartheta_2(\cdot))$ *такие, что* $F_1^*(\vartheta_1^*)<+\infty$, $F_2^*(\vartheta_2^*)<+\infty$, *то* $b_1(s)=0$, $\vartheta_1(t,s)=0$, $a_2(t)=0$, $\vartheta_2(t,s)=0$.

Лемма 4. *Пусть* g,ψ_1 *и* ψ_2 *выпуклые нормальные интегранты, существуют такие* $a_1(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $a_2(\cdot)\in L_1[0,T]$, $a_3(\cdot)\in L_1[0,S]$ *и* $\alpha>0$, *что* $a_1(t,s)-\alpha|z|^k\le g(t,s,z)$, $a_2(t)-\alpha|x|^k\le\psi_1(t,x)$, $a_3(s)-\alpha|y|^k\le\psi_2(s,y)$ *при некотором* $k\ge 0$, *существуют функции* $u_0\in A^n([0,T]\times[0,S])$ *и число* $r>0$ *такое, что для* $y\in R^n, |y|\le r$ *функции* $g(t,s,u_0(t,s)+y)$, $\psi_1(t,u_0(t,0)+y)$, $\psi_2(s,u_0(0,s)+y)$ *- суммируемы,* $q(u_0(0,0),u_0(T,0),u_0(0,S),u_0(T,S))$ *конечно. Тогда* $\vartheta^*=(c,a(\cdot),\ b(\cdot),\vartheta(\cdot))\in\partial J_1(\overline{u})$ *тогда и только тогда, когда существуют меры* $\lambda\in frm([0,T]\times[0,S])^n$,

$\mu\in frm[0,T]^n$, $\gamma\in frm[0,S]^n$ *и* $\overline{c},d_1,d_2,d\in R$ *такие, что*

1) $\vartheta^*(u)=\int_0^T\int_0^S\left(u(t,s)\middle|d\lambda\right)+\int_0^T\left(u(t,0)\middle|d\mu\right)+\int_0^S\left(u(0,s)\middle|d\gamma\right)+\left(u(0,0)\middle|\bar{c}-d_1-d_2+d\right)+$
$+\left(u(T,0)\middle|d_1-d\right)+\left(u(0,S)\middle|d_2-d\right)+\left(u(T,S)\middle|d\right)$;

2) $\omega(t,s)\in\partial g\left(t,s,\bar{u}(t,s)\right)$;

3) $\omega_1(t)\in\partial\psi_1\left(t,\bar{u}(t,0)\right)$;

4) $\omega_2(s)\in\partial\psi_2\left(s,\bar{u}(0,s)\right)$;

5) $\left(\bar{c}-d_1-d_2+d,d_1-d,d_2-d,d\right)\in\partial q\left(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S)\right)$;

6) $\max\limits_{u\in Q}\int_0^T\int_0^S\left(u(t,s)\middle|d\lambda_s\right)=\int_0^T\int_0^S\left(\bar{u}(t,s)\middle|d\lambda_s\right)$;

7) $\max\limits_{x\in Q_1}\int_0^T\left(x(t)\middle|d\mu_s\right)=\int_0^T\left(\bar{u}(t,0)\middle|d\mu_s\right)$;

8) $\max\limits_{y\in Q_2}\int_0^S\left(y(s)\middle|d\gamma_s\right)=\int_0^S\left(\bar{u}(0,s)\middle|d\gamma_s\right)$;

где $\lambda(\mathrm{E})=\int_{\mathrm{E}}\omega(t,s)dtds+\lambda_s(\mathrm{E})$, $\mu(\mathrm{E}_1)=\int_{\mathrm{E}_1}\omega_1(t)dt+\mu_s(\mathrm{E}_1)$, $\gamma(\mathrm{E}_2)=\int_{\mathrm{E}_2}\omega_2(s)ds+$
$+\gamma_s(\mathrm{E}_2)$ *- Лебеговское разложение* λ, μ *и* γ *соответственно.*

Лемма 5. *Если* g,ψ_1 *и* ψ_2 *выпуклые нормальные интегранты и существует число* $r>0$ *такое, что для* $y\in R^n,|y|\le r$ *функции* $g\left(t,s,\bar{u}(t,s)+y\right)$, $\psi_1\left(t,\bar{u}(t,0)+y\right)$, $\psi_2\left(s,\bar{u}(0,s)+y\right)$ *суммируемы и* $q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S))$ *конечно, то* $\vartheta^*=\left(c,a(\cdot),b(\cdot),\vartheta(\cdot)\right)\in\partial J_1(\bar{u})$ *тогда и только тогда, когда* $\vartheta_{ts}\in L_1^n([0,T]\times[0,S]),a(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T],b(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]$, $\vartheta(T,S)=\vartheta(T,0)=\vartheta(0,S)$,
$\vartheta_{ts}(t,s)\in\partial g(t,s,\bar{u}(t,s)),\vartheta_t(t,0)-\dot{a}(t)\in\partial\psi_1(t,\bar{u}(t,0)),\vartheta_s(0,s)-\dot{b}(s)\in\partial\psi_2(s,\bar{u}(0,s))$ *и* $(c-a(0)-b(0)+\vartheta(0,0),a(T)-\vartheta(T,0),b(S)-\vartheta(0,S),\vartheta(T,S))\in\partial q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),$
$\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S))$.

Пусть $f:[0,T]\times[0,S]\times R^{4n}\to\bar{R},\varphi_1:[0,T]\times R^{2n}\to\bar{R},\varphi_2:[0,S]\times R^{2n}\to\bar{R}$ измеримые интегранты. Рассмотрим минимизацию функционала

$$J(u)=\int_0^T\int_0^S f(t,s,u(t,s),u_t(t,s),u_s(t,s),u_{ts}(t,s))dtds+\int_0^T\varphi_1(t,u(t,0),u_t(t,0))dt+$$
$$+\int_0^S\varphi_2(s,u(0,s),u_s(0,s))ds+q(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S))$$

в пространстве $A^n([0,T]\times[0,S])$.

Положим $f^0(t,s,y;\vartheta^*)=\inf\left\{\left(w\middle|\vartheta^*\right)+f(t,s,y,w):w\in R^{3n}\right\}$,

$\varphi_1^0(t,y,\vartheta_1^*)=\inf\left\{\left(w_1\middle|\vartheta_1^*\right)+\varphi_1(t,y,w_1):w_1\in R^n\right\},\varphi_2^0(s,y,\vartheta_2^*)=$
$=\inf\left\{\left(w_2\middle|\vartheta_2^*\right)+\varphi_2(s,y,w_2):w_2\in R^n\right\}$.

Теорема 1. *Пусть* f, φ_1 *и* φ_2 *выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы* $\bar{u}$ *являлась точкой минимума функционала* $J(u)$ *на пространстве* $A^n([0,T]\times[0,S])$ *достаточно, а если существуют функции* $\tilde{u}\in A^n([0,T]\times[0,S])$, $\alpha(\cdot)\in L_1([0,T]\times[0,S])$, $\beta(\cdot)\in L_1[0,S]$, $\nu(\cdot)\in L_1[0,T]$, *числа* $c\ge 0, r>0$ *такие, что для* $y\in R^n, |y|\le r$

$$f(t,s,\tilde{u}(t,s)+Y,z_1,z_2,\tilde{u}_{ts}(t,s))\le \alpha(t,s)+C|(z_1,z_2)|,$$

функции $\varphi_1(t,\tilde{u}(t,0)+y,\tilde{u}_t(t,0)),\varphi_2(s,\tilde{u}(0,s)+y,\tilde{u}_s(0,s))$ *суммируемы,* $-\alpha(t,s)-c|z|\le f(t,s,z)$, $\nu(t)-c|x|\le\varphi_1(t,x)$, $\beta(s)-c|x|\le\varphi_2(s,x)$ *и функция* $q(\tilde{u}(0,0),\cdot)$ *непрерывна в точке* $(\tilde{u}(T,0),\tilde{u}(0,S),\tilde{u}(T,S))$, *то и необходимо, чтобы нашлись функции* $\overline{P}_1\in L_\infty^n([0,T]\times[0,S])$, $\overline{P}_2\in L_\infty^n([0,T]\times[0,S])$, *меры* $\lambda\in frm([0,T]\times[0,S])^n$, $\mu\in frm[0,T]^n$, $\gamma\in frm[0,S]^n$, *функционал* $\overline{\vartheta}^*=(0,\vartheta_1(\cdot),\vartheta_2(\cdot),\vartheta(\cdot))\in A^n([0,T]\times[0,S])^*$ *и векторы* $\bar{c},d_1,d_2,d\in R^n$ *такие, что*

1) $$\vartheta^*(u)=\int_0^T\int_0^S(u(t,s)|d\lambda)+\int_0^T(u(t,0)|d\mu)+\int_0^S(u(0,s)|d\gamma)+(u(0,0)|\bar{c}-d_1-d_2+d)+$$
$$+(u(T,0)|d_1-d)+(u(0,S)|d_2-d)+(u(T,S)|d),$$

2) $$\omega(t,s)\in\partial f^0\left(t,s,\bar{u}(t,s),\overline{P}_1(t,s),\overline{P}_2(t,s),\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right),$$

3) $$\omega_1(t)\in\partial\varphi_1^0\left(t,\bar{u}(t,0);\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right),$$

4) $$\omega_2(s)\in\partial\varphi_2^0\left(s,\bar{u}(0,s);\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right),$$

5) $$(\bar{c}-d_1-d_2+d,d_1-d,d_2-d,d)\in\partial q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S)),$$

6) $$f^0\left(t,s,\bar{u}(t,s);\overline{P}_1(t,s),\overline{P}_2(t,s),\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)=(\bar{u}_t(t,s)|\overline{P}_1(t,s))+(\bar{u}_s(t,s)|\overline{P}_2(t,s))+$$
$$+\left(\bar{u}_{ts}(t,s)\left|\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right.\right)+$$
$$+f(t,s,\bar{u}(t,s),\bar{u}_t(t,s),\bar{u}_s(t,s),\bar{u}_{ts}(t,s)),$$

7) $$\varphi_1^0\left(t,\bar{u}(t,0);\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right)=\left(\bar{u}_t(t,0)\left|\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right.\right)+$$
$$+\varphi_1(t,\bar{u}(t,0),\bar{u}_t(t,0)),$$

8) $\varphi_2^0\left(s,\bar{u}(0,s);\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)=\left(\bar{u}_s(0,s)\middle|\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)+$

$+\varphi_2(s,\bar{u}(0,s),\bar{u}_s(0,s)),$

9) $\max_{u\in Q}\int_0^T\int_0^S\left(u(t,s)\middle|d\lambda_s\right)=\int_0^T\int_0^S\left(\bar{u}(t,s)\middle|d\lambda_s\right),$

10) $\max_{x\in Q_1}\int_0^T\left(x(t)\middle|d\mu_s\right)=\int_0^T\left(\bar{u}(t,0)\middle|d\mu_s\right),$

11) $\max_{y\in Q_2}\int_0^S\left(y(s)\middle|d\gamma_s\right)=\int_0^S\left(\bar{u}(0,s)\middle|d\gamma_s\right),$

где $\lambda(E)=\int_E\omega(t,s)dtds+\lambda_s(E)$, $\mu(E_1)=\int_{E_1}\omega_1(t)dt+\mu_s(E_1)$, $\gamma(E_2)=\int_{E_2}\omega_2(s)ds+$ $+\gamma_s(E_2)$ *- Лебеговское разложение* λ,μ,γ *соответственно,* $Q=\Big\{u\in A^n([0,T]\times$ $\times[0,S]):\int_0^T\int_0^S f^0\left(t,s,u(t,s);\overline{P}_1(t,s),\overline{P}_2(t,s),\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\right.$ $\left.-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)dtds<+\infty\Big\}$, $Q_1=\left\{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]:\int_0^T\varphi_1^0\left(t,x(t);\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right)dt<+\infty\right\},$

$Q_2=\left\{y(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]:\int_0^S\varphi_2^0\left(s,y(s);\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)ds<+\infty\right\}$

Теорема 2. *Пусть* f,φ_1 *и* φ_2 *выпуклые нормальные интегранты. Для того, чтобы* $\bar{u}$ *являлась точкой минимума функционала* $J(u)$ *на пространстве* $A^n([0,T]\times[0,S])$ *достаточно, а если при* $\tilde{u}=\bar{u}$ *удовлетворяются условия теоремы 1 и необходимо, чтобы нашлись функции* $\overline{P}_1\in L_\infty^n([0,T]\times[0,S])$, $\overline{P}_2\in L_\infty^n([0,T]\times[0,S])$, $\vartheta(\cdot)\in L_1^n([0,T]\times[0,S])$, $\vartheta_1(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$, $\vartheta_2(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,S]$, *где* $\vartheta_{ts}\in L_1^n([0,T]\times[0,S])$, $\vartheta(T,S)=\vartheta(T,0)=\vartheta(0,S)$ *такие, что*

1) $\vartheta_{ts}(t,s)\in\partial f^0\left(t,s,\bar{u}(t,s);\overline{P}_1(t,s),\overline{P}_2(t,s),\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\right.$

$\left.+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right),$

2) $\vartheta_t(t,0)-\dot{\vartheta}_1(t)\in\partial\varphi_1^0\left(t,\bar{u}(t,0);\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right),$

3) $\vartheta_s(0,s)-\dot{\vartheta}_2(s)\in\partial\varphi_2^0\left(s,\bar{u}(0,s);\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right),$

4) $\left(\vartheta(0,0)-\vartheta_1(0)-\vartheta_2(0),\vartheta_1(T)-\vartheta(T,0),\vartheta_2(S)-\vartheta(0,S),\vartheta(T,S)\right)\in$ $\in\partial q\left(\bar{u}(0,0),\bar{u}(T,0),\bar{u}(0,S),\bar{u}(T,S)\right),$

5) $f^0\left(t,s,\overline{u}(t,s);\overline{P}_1(t,s),\overline{P}_2(t,s),\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\right.$

$\left.+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)=\left(\overline{u}_t(t,s)\middle|\overline{P}_1(t,s)\right)+\left(\overline{u}_s(t,s)\middle|\overline{P}_2(t,s)\right)+$

$+\left(\overline{u}_{ts}(t,s)\middle|\vartheta(t,s)+\int_0^s\overline{P}_1(t,\nu)d\nu-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu+\int_0^t\overline{P}_2(\tau,s)d\tau-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)+$

$+f\left(t,s,\overline{u}(t,s),\overline{u}_t(t,s),\overline{u}_s(t,s),\overline{u}_{ts}(t,s)\right),$

6) $\varphi_1^0\left(t,\overline{u}(t,0);\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right)=\left(\overline{u}_t(t,0)\middle|\vartheta_1(t)-\int_0^S\overline{P}_1(t,\nu)d\nu\right)+$

$+\varphi_1\left(t,\overline{u}(t,0),\overline{u}_t(t,0)\right),$

7) $\varphi_2^0\left(s,\overline{u}(0,s);\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)=\left(\overline{u}_s(0,s)\middle|\vartheta_2(s)-\int_0^T\overline{P}_2(\tau,s)d\tau\right)+$

$+\varphi_2\left(s,\overline{u}(0,s),\overline{u}_s(0,s)\right).$

Замечание 1. Если в теореме 1 (или теореме 2) функция $f(t,s,u(t,s),$ $u_t(t,s),u_s(t,s),u_{ts}(t,s))$ не зависит от $\left(u_t(t,s),u_s(t,s)\right)$, то $\overline{P}_1(t,s)=\overline{P}_2(t,s)=0$.

§2. Об экстремальной задаче для двумерных дифференциальных включений.

Пусть $a:[0,1]\times[0,1]\times R^{3n}\to 2^{R^n}$, причем $a(\tau,\nu,z)$ компактны при всех (τ,ν,z); $M_1:[0,1]\to 2^{R^n}$, $M_2:[0,1]\to 2^{R^n}$ измеримы, $M_1(t)$ и $M_1(s)$ не пусты и замкнуты.

Функция $u\in A^n([0,1]\times[0,1])$ удовлетворяющая включениям

$$\begin{gathered}u_{ts}(t,s)\in a\left(t,s,u(t,s),u_t(t,s),u_s(t,s)\right),\\ u_t(t,0)\in M_1(t),\ t\in[0,1];\quad u_s(0,s)\in M_2(s),\ s\in[0,1]\end{gathered}\tag{1}$$

для почти всех (t,s) называется решением включения (1).

Решение включения (1) минимизирующее функционал

$$J(u)=\int_0^1\int_0^1 f\left(t,s,u(t,s),u_t(t,s),u_s(t,s),u_{ts}(t,s)\right)dtds+\int_0^1\varphi_1\left(t,u(t,0),u_t(t,0)\right)dt+$$

$$+\int_0^1\varphi_2\left(s,u(0,s),u_s(0,s)\right)ds+q\left(u(0,0),u(T,0),u(0,S),u(T,S)\right)\tag{2}$$

среди всех решений задачи (1) назовем оптимальным. Требуется найти необходимые условия оптимальности решения задачи (1), (2).

Лемма 6. *Если множество* $a(t,s,x,y,z)$ *не пусто и компактно, отображение* $(t,s)\to a(t,s,x,y,z)$ *измеримо и* $\rho_x\left(a(t,s,x_1,y_1,z_1),a(t,s,x_2,y_2,z_2)\right)\le$ $\le M\left(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|z_2-z_1|\right)$, $M>0$, *и для* $\overline{u}(\cdot)\in A^n([0,1]\times[0,1])$ *удовлетворяются условия*

$$d\left(\bar{u}_{ts}(t,s),a\left(t,s,\bar{u}(t,s),\bar{u}_t(t,s),\bar{u}_s(t,s)\right)\right)\le\rho(t,s),$$

$$d\left(\bar{u}(0,s),\varphi(s)\right)\le\xi_1(s),\quad d\left(\bar{u}(t,0),\psi(t)\right)\le\eta_1(t),$$

$$d\left(\bar{u}_s(0,s),\dot{\varphi}(s)\right)\le\xi_2(s),\quad d\left(\bar{u}_t(t,0),\dot{\psi}(t)\right)\le\eta_2(t),$$

где $\rho(\cdot)\in L_1([0,1]\times[0,1])$, $\xi_1(\cdot)\in C[0,1]$, $\xi_2(\cdot)\in L_1[0,1]$, $\eta_1(\cdot)\in C[0,1]$, $\eta_2(\cdot)\in L_1[0,1]$, $\varphi(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,1]$, $\psi(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,1]$, $\varphi(0)=\psi(0)$, *то существует такое решение задачи*

$$u_{ts}(t,s)\in a\left(t,s,u(t,s),u_t(t,s),u_s(t,s)\right),$$

$$u(t,0)=\psi(t),\quad u(0,s)=\varphi(s),$$

что

$$\left|u(t,s)-\bar{u}(t,s)\right|\le\xi(s)+\eta(t)+\frac{1}{2}de^{4M(t+s)}+\frac{1}{4}dch\left(2\sqrt{M}(t+s)\right)+\frac{1}{4}d,$$

$$\left|u_t(t,s)-\bar{u}_t(t,s)\right|\le 2dMe^{4M(t+s)}+\frac{d\sqrt{M}}{2}sh\left(2\sqrt{M}(t+s)\right)+\eta(t)e^{Ms}+\int_0^s e^{M(s-\nu)}\rho(t,\nu)d\nu,$$

$$\left|u_s(t,s)-\bar{u}_s(t,s)\right|\le 2dMe^{4M(t+s)}+\frac{d\sqrt{M}}{2}sh\left(2\sqrt{M}(t+s)\right)+\xi(s)e^{Mt}+\int_0^t e^{M(t-\tau)}\rho(\tau,s)d\tau,$$

$$\left|u_{ts}(t,s)-\bar{u}_{ts}(t,s)\right|\le\rho(t,s)+M\int_0^t e^{M(t-\tau)}\rho(\tau,s)d\tau+M\int_0^s e^{M(s-\nu)}\rho(t,\nu)d\nu+$$
$$+8M^2de^{4M(t+s)}+dMch\left(2\sqrt{M}(t+s)\right)+\eta(t)Me^{Ms}+\xi(s)Me^{Mt},$$

где $\xi(s)=\xi_1(s)+\xi_2(s)+\xi_1(0)$, $\eta(t)=\eta_1(t)+\eta_2(t)$, $a_1=\int_0^1\xi(s)ds$, $a_2=\int_0^1\xi(t)dt$, $b=$ $=\int_0^1\int_0^1\rho(\tau,\nu)d\tau d\nu$, $d=\max(a_1,a_2,b)$.

Положим

$$\psi(t,s,z,\omega)=\inf\left\{|u-\omega|:u\in a(t,s,z)\right\},\ q_1(t,x)=\inf\left\{|z-x|:z\in M_1(t)\right\},\ q_2(s,y)=$$
$$=\inf\left\{|u-y|:u\in M_2(s)\right\},\ F(u)=\int_0^1\int_0^1\psi\left(t,s,u(t,s),u_t(t,s),u_s(t,s),u_{ts}(t,s)\right)dtds+$$
$$+\int_0^1 q_1\left(t,u_t(t,0)\right)dt+\int_0^1 q_2\left(s,u_s(0,s)\right)ds,\quad I_l(u)=J(u)+lF(u).$$

Теорема 3. *Пусть отображения* $(t,s)\to a(t,s,z)$, $t\to M_1(t)$, $s\to M_2(s)$ *измеримы,* $M_1(t)$ *и* $M_2(s)$ *не пусты и замкнуты,* $a(t,s,z)$ *компактны и* $\rho_x\left(a(t,s,x_1,y_1,z_1),a(t,s,x_2,y_2.z_2)\right)\le M\left(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|z_2-z_1|\right)$. *Кроме того, пусть существуют функции* $k(\cdot)\in L_\infty([0,1]\times[0,1])$, $k_1(\cdot)\in L_\infty[0,1]$, $k_2(\cdot)\in L_\infty[0,1]$ *и число* $\bar{k}$ *такие, что*

1) $\left|f(t,s,z)-f(t,s,z_1)\right|\le k(t,s)|z-z_1|$ *для* $z,z_1\in R^{4n}$,

2) $\left|\varphi_1(t,x)-\varphi_1(t,x_1)\right|\le k_1(t)|x-x_1|$ *для* $x,x_1\in R^{2n}$,

3) $\left|\varphi_2(s,y)-\varphi_2(s,y_1)\right|\le k_2(s)|y-y_1|$ *для* $y,y_1\in R^{2n}$, *4)* $\left|q(\vartheta)-q(\vartheta_1)\right|\le \bar{k}\left|\vartheta-\vartheta_1\right|$ *для* $\vartheta,\vartheta_1\in R^{4n}$

и пусть отображения $(t,s)\to f(t,s,z)$, $t\to\varphi_1(t,x)$, $s\to\varphi_2(s,y)$ *измеримы. Тогда если* $\bar{u}\in A^n([0,1]\times[0,1])$ *является решением задачи (1), (2), то существует число* l_0 *такое, что при* $u\in A^n$ *и* $l\ge l_0$

$$I_l^{|\beta|-}(\bar{u};u)=\varliminf_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^\beta}\left(I_l(\bar{u}+\lambda u)-I_l(\bar{u})\right)\ge 0.$$

Рассмотрим минимизацию функционала

$$J(u)=\int_0^1\int_0^1 g(t,s,u(t,s))dtds+\int_0^1\psi_1(t,u(t,0))dt+$$
$$+\int_0^1\psi_2(s,u(0,s))ds+q(u(0,0),u(1,0),u(0,1),u(1,1)) \tag{3}$$

среди всех решений задачи

$$\begin{gathered} u_{ts}(t,s)\in a(t,s,u(t,s),u_t(t,s),u_s(t,s)),\\ u_t(t,0)\in M_1(t),\ \ u_s(0,s)\in M_2(s),\\ u(t,s)\in M(t,s), \end{gathered} \tag{4}$$

где $M:[0,1]\times[0,1]\to 2^{R^n}$. Пусть $\bar{u}(t,s)$ является решением задачи (3), (4). Кроме того предполагаем, что существует гиперкасательная к $M(t,s)$ в $\bar{u}(t,s)$ (см.[6]). Касательный и нормальный конус к C в точке x обозначается соответственно $T_C(x)$ и $N_C(x)$ (см.[6]). Обозначим

$$K(t,s,z,\omega)=\delta_{gra(t,s,z)}(z,\omega)=\begin{cases}0, & \omega\in a(t,s,z),\\ +\infty, & \omega\notin a(t,s,z).\end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть отображение* $(t,s)\to a(t,s,z)$, $t\to M_1(t)$, $s\to M_2(s)$ *измеримы,* $a(t,s,z)$ *не пусто и компактно,* $M_1(t)$ *и* $M_2(s)$ *не пусты и замкнуты,* $\rho_x(a(t,s,x_1,y_1,z_1),a(t,s,x_2,y_2,z_2))\le M(|x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|z_2-z_1|)$, $M(t,s)$ *замкнуто при всех* (t,s), *отображение* $(t,s)\to M(t,s)$ *непрерывно,* $\operatorname{int}M(t,s)$ *не пусто. Пусть* $\bar{u}(t,s)$ *является решением задачи (3), (4) и существует гиперкасательная к* $M(t,s)$ *в* $\bar{u}(t,s)$. *Кроме того, пусть существуют функции* $k(\cdot)\in L_1([0,1]\times[0,1])$, $k_1(\cdot)\in L_1[0,1]$, $k_2(\cdot)\in L_1[0,1]$ *и число* k_0 *такие, что*

1) $\left|g(t,s,z)-g(t,s,z_1)\right|\le k(t,s)\left|z-z_1\right|$ *для* $z,z_1\in R^n$,

2) $\left|\psi_1(t,x)-\psi_1(t,x_1)\right|\le k_1(t)\left|x-x_1\right|$ *для* $x,x_1\in R^n$,

3) $\left|\psi_2(s,y)-\psi_2(s,y_1)\right|\le k_2(s)\left|y-y_1\right|$ *для* $y,y_1\in R^n$,

4) $\left|q(\vartheta)-q(\vartheta_1)\right|\le k_0\left|\vartheta-\vartheta_1\right|$ *для* $\vartheta,\vartheta_1\in R^{4n}$

и пусть отображения $(t,s)\to g(t,s,z)$, $t\to\psi_1(t,x)$, $s\to\psi_2(s,y)$ *измеримы.*

Тогда существуют функции $\overline{P}_1 \in L_\infty^n([0,1]\times[0,1])$, $\overline{P}_2 \in L_\infty^n([0,1]\times[0,1])$, $\omega_1(\cdot) \in L_1^n[0,1]$, $\omega_2(\cdot) \in L_1^n[0,1]$, *мера* $\lambda \in frm([0,1]\times[0,1])^n$, *векторы* $\overline{c}, d_1, d_2, d \in \in R^n$ *и функционал* $\overline{\vartheta}^* = (0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta) \in A^n([0,1]\times[0,1])^*$ *такие, что*

1) $\vartheta^*(u) = \int_0^1\int_0^1 (u(t,s)|d\lambda) + \int_0^1 (u(t,0)|\omega_1(t))dt + \int_0^1 (u(0,s)|\omega_2(s))ds +$

$+(u(0,0)|\overline{c} - d_1 - d_2 + d) + (u(1,0)|d_1 - d) + (u(0,1)|d_2 - d) + (u(1,1)|d)$,

2) $\left(\omega(t,s), -\overline{P}_1(t,s), -\overline{P}_2(t,s), -\vartheta(t,s) + \int_0^1 \overline{P}_1(t,\nu)d\nu - \int_0^s \overline{P}_1(t,\nu)d\nu + \right.$

$\left. + \int_0^1 \overline{P}_2(\tau,s)d\tau - \int_0^t \overline{P}_2(\tau,s)d\tau \right) \in \left(\partial g(t,s,\overline{u}(t,s)) + N_{M(t,s)}(\overline{u}(t,s)), 0\right) +$

$+ \partial K(t,s,\overline{u}(t,s), \overline{u}_t(t,s), \overline{u}_s(t,s), \overline{u}_{ts}(t,s))$,

3) $\left(\omega_1(t), \int_0^1 \overline{P}_1(t,\nu)d\nu - \vartheta_1(t)\right) \in \left(\partial\psi_1(t,\overline{u}(t,0)), N_{M_1(t)}(\overline{u}_t(t,0))\right)$,

4) $\left(\omega_2(s), \int_0^1 \overline{P}_2(t,\nu)d\nu - \vartheta_2(s)\right) \in \left(\partial\psi_2(s,\overline{u}(0,s)), N_{M_2(s)}(\overline{u}_s(0,s))\right)$,

5) $(\overline{c} - d_1 - d_2 + d, d_1 - d, d_2 - d, d) \in \partial q(\overline{u}(0,0), \overline{u}(1,0), \overline{u}(0,1), \overline{u}(1,1))$,

6) $\max\left\{\int_0^1\int_0^1 (z(t,s)|d\lambda_s) : z(\cdot) \in A^n, z(t,s) \in T_{M(t,s)}(\overline{u}(t,s))\right\} = 0$,

где $\lambda(E) = \int_E \omega(t,s)dtds + \lambda_s(E)$ *Лебеговское разложение* λ.

Замечание 2. Аналогичная методика также применима, когда ограничение $u_t(t,0) \in M_1(t), u_s(0,s) \in M_2(s)$ заменяются ограничением $u_t(t,0) \in M_3(t, u(t,0))$, $u_s(0,s) \in M_4(s, u(0,s))$ и $u(0,0) \in M_0 \subset R^n$.

Отметим, что аналогичная методика применима и для многомерных дифференциальных включений.

§3. Необходимые условия экстремума второго порядка для негладких задач.

Пусть X - банахово пространство, $f: X \to R$ и f - липшицевая функция в окрестности заданной точки x_0. Положим

$$f^{(1)+}(x_0;x) = \overline{\lim_{\substack{y\to x_0\\ \lambda\downarrow 0}}} \frac{1}{\lambda}\left(f(y+\lambda x) - f(y)\right), \quad f^{(1)-}(x_0;x) = \underline{\lim_{\substack{y\to x_0\\ \lambda\downarrow 0}}} \frac{f(y+\lambda x) - f(y)}{\lambda}.$$

Обобщенный градиентом (см.[6]) функции f в точке x_0, обозначаемой $\partial f(x_0)$, есть множество всех линейных непрерывных функционалов $x^* \in X^*$ такие, что

$$f^{(1)+}(x_0;x) \geq \langle x^*, x\rangle \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Из определения следует, что (см.[7])

$$f^{(1)-}(x_0;x) \le \langle x^*, x\rangle \le f^{(1)+}(x_0;x), \quad x \in X.$$

Положим

$$f_{x^*}^{(2)+}(x_0;x) = \overline{\lim_{\substack{y\to x_0\\ \lambda\downarrow 0}}} \frac{2\left(f(y+\lambda x) - f(y) - \lambda\langle x^*, x\rangle\right)}{\lambda^2},$$

$$f_{x^*}^{(2)-}(x_0;x) = \underline{\lim_{\substack{y\to x_0\\ \lambda\downarrow 0}}} \frac{2}{\lambda^2}\left(f(y+\lambda x) - f(y) - \lambda\langle x^*, x\rangle\right).$$

Пусть $x^* \in \partial f(x_0)$. Множество всех квадратичных функций удовлетворяющих условию

$$f_{x^*}^{(2)-}(x_0;x) \le Q(x) \le f_{x^*}^{(2)+}(x_0;x)$$

назовем 2-обобщенный градиентом функции f в точке x_0 относительно x^* и обозначим через $\partial_2(x^*)f(x_0)$.

Лемма 7. *Если f_1 и f_2 - липшицевые функции в окрестности точки x_0, $x^* \in \partial(f_1+f_2)(x_0)$ и $x_1^* + x_2^* = x^*$, где $x_1^* \in \partial f_1(x_0)$, $x_2^* \in \partial f_2(x_0)$, то*

$$\partial_2(x^*)(f_1+f_2)(x_0) \subset \partial_2(x_1^*)f_1(x_0) + \partial_2(x_2^*)f_2(x_0).$$

Лемма 8. *Если f - липшицевая функция в окрестности точки x_0, $x^* \in \partial f(x_0)$ и $\alpha \in R$, то*

$$\partial_2(x^*)(\alpha f)(x_0) = \alpha\partial_2(x^*)f(x_0).$$

Лемма 9. *Если f дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x_0 и $x^* = f'(x_0)$, то*

$$\partial_2(x^*)f(x_0) = f''(x_0).$$

Пусть $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \ge \alpha\nu$ и $\delta > 0$. Функцию f назовем $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ - липшицевой с постоянной L в точке x_0, если f удовлетворяет условию

$$\left|f(x_0+x+y) - f(x_0+x)\right| \le L\|y\|^{\nu}\left(\|x\|^{\beta-\alpha\nu} + \|y\|^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}\right), \; x, y \in \delta B,$$

где $B = \{x \in X: \|x\| < 1\}$.

Теорема 5. *Пусть x_0 является точкой минимума функции f на множестве C, в точке x_0 f удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицеву условию с постоянной L, $\lambda \ge L$, $\delta_0 \ge \delta$ и $C \subset x_0 + \delta B$. Тогда*

$$0 \in \partial_2(0)\left(f + \lambda\left(d^{\frac{\beta}{\alpha}} + \delta_0^{\beta-\alpha\nu}d^{\nu}\right)(x_0)\right).$$

Следствие 1. *Если x_0 является точкой минимума функции f на множестве $C = \{x: \varphi(x) = 0\}$, где $\varphi: X \to R$, в точке x_0 f удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицеву условию с постоянной L, $C \subset x_0 + \delta B$ и $\varphi(x) \ge k\Big(d^{\frac{\beta}{\alpha}} +$ $+ \delta_0^{\beta-\alpha\nu}d^{\nu}\Big)(x)$, то при $\lambda \ge L$, $\delta_0 \ge \delta$*

$$0 \in \partial_2(0)\left(f + \frac{\lambda}{k}\varphi\right)(x_0).$$

Теорема 6. *Пусть* x_0 *минимизирует функции* f *на множестве* $\{x \in C: g(x) \le 0, \varphi(x) = 0\}$, *в некоторой точке* $\bar{x} \in C$ *функции* $f, g_i, i = \overline{1,n}$, $\varphi_j, j = \overline{1,m}$, *удовлетворяют* $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$ *липшицевому условию с постоянной* $L, \delta_0 \ge \delta, \lambda \ge L$ *и* $C < \bar{x} + \delta B$. *Тогда функция*

$$\max\left\{ l\big(f(y) - f(x_0)\big) + \sum_{i=1}^{n} r_i g_i(y) + \sum_{j=1}^{m} s_j \varphi_j(y) : l \ge 0, r_i \ge 0, i = \overline{1,n}, l + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{j=1}^{m} |s_j| = 1, s_j = 0 \text{ при } \varphi_j(y) = 0 \right\} + \lambda\left(d^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + \delta_0^{\beta - \alpha\nu} d^{\nu}(y)\right)$$

достигает минимума на $\bar{x} + \delta B$ *в точке* x_0.

Отметим, что в теореме 6 $n \ge 1$ и $m \ge 1$, но можно считать, чито m или n равно нулю, когда отсутствуют явно заданные ограничения типа равенства или неравенства.

Используя введенные определения можно получить необходимые условия второго порядка для дифференциальных включений, аналогично работе [3].

Литература

[1]. Садыгов М.А. *О минимизации интегральных функционалов в пространствах Соболева.* Препринт №165, Баку, 1986, 48с.

[2]. Садыгов М.А. *О необходимых условиях минимума для многомерных дифференциальных включений.* Вопросы прикладного нелинейного анализа. Баку: Элм, 1994, с.3-28.

[3]. Садыгов М.А. *Об экстремальной задаче для двумерных дифференциальных включений.* Изв.АН Азербайджана, 1995, №1-3, с.71-81.

[4]. Садыгов М.А. *Экстремальные задачи для негладких систем.* Баку: 1996, 148с.

[5]. Садыгов М.А. *Необходимые условия экстремума для двумерных дифференциальных включений.* Труды института математики и механики. Баку: 1998, т.VIII(XVI), с. 186-198.

[6]. Кларк Ф. *Оптимизация и негладкий анализ* . М.: Наука, 1988.

[7]. Садыгов М.А. *О необходимых условиях экстремума в одном классе негладких функций.* Изв.АН Азерб.ССР, 1980, №4, с.118-124.