НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНА
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

ЭЛЬЧИН АЛИ оглы МАМЕДОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ПРОСТРАНСТВАХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ТЕРМИНАХ ЛОКАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЙ

1202.01 – Анализ и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

Диссертации на соискание учёной степени
доктора философии по математике

Баку - 2018

Работа выполнена на кафедре **«Математический анализ» Бакинского Государственного Университета.**

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор **Садиг Абдуллев**

Официальные оппоненты:

- доктор физико-математических наук, проф. **Рагим Рзаев** (Азербайджанский Государственный Педагогический Университет)
- профессор НАНА, доктор наук по математике **Ровшан Бандалиев** (Институт Математики и Механики НАН Азербайджана)

Ведущая организация:
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет кафедра «Высшая математика».

Защита диссертации состоится 07 декабря 2018 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета Д.01.111 по присуждению ученой степени доктора наук и доктора философии при Институте Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института Математики и Механики Национальной Академии Наук Азербайджана

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б.Вагабзаде, 9.

Автореферат разослан 23 октября 2018 года.

Учёный секретарь
Диссертационного Совета
Д.01.111 **доц. Тамилла Гасанова**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Идеи и методы теории сингулярных интегральных операторов (СИО), максимальных и дробно - максимальных функций и потенциалов Рисса, Бесселя и других, являющихся мощными аппаратами гармонического анализа в настоящее время широко применяются в математической физике, в теории функций и функциональном анализе, в теории вероятностей и в многих других областях математики, физики и механики.

Свойства потенциалов Рисса исследованы в работах М.Рисса, G.Hardy, С.Г.Самко и др., а также в работах азербайджанских математиков А.Д.Гаджиева, С.К.Абдуллаева, В.С.Гулиева, Р.М.Рзаева и др.

Изложение ряда свойств потенциалов Рисса содержатся в монографиях И.М.Стейна, С.Л.Соболева и др.

В настоящее время широко изучаются свертки, связанные некоторым специальным сдвигом (так называемым, обобщенным сдвигом), приспособленным к преобразованию Фурье-Бесселя, ассоциированного дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя:

$$\Delta_{B_{m+k,k}}(x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{i=m+1}^{m+k}B_{x_i},\ B_{x_i}=\frac{d^2}{dx_i^{\,2}}+\frac{2\nu_i}{x_i}\cdot\frac{d}{dx_i}$$

$$(x_i>0,\nu_i>0)\text{ -}$$

где B_{x_i} сингулярный дифференциальный оператор Бесселя.

Изучение уравнений в частных производных, содержащих дифференциальный оператор Бесселя, с использованием многомерного преобразования Фурье-Бесселя было начато в работах И.А.Киприянова. Им были введены соответствующие весовые $L_{p,\gamma}$ - пространства и доказаны для них теоремы вложения, включая прямые и обратные теоремы о следах. Это, в частности, позволило ему получить априорные оценки решений в терминах названных весовых классов. В этих работах было введено понятие B - эллиптического оператора.

И.А.Киприяновым, Л.А.Ивановым получены представления для фундаментальных решений эллиптических уравнений, в которых оператор Бесселя действует по нескольким переменным, в частности еще было доказано, что объемный потенциал

$$I_B^{\alpha}(f)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}}|y|^{\alpha-(m+k)-|\gamma_{m+k,k}|}T^y(f(x))y^{\gamma_{m+k,k}}dy,$$

названный обобщенным потенциалом Рисса, является решением B-эллиптического уравнения $\Delta_{B_{m+k,k}}(x)=f(x)$, где T^y - оператор сдвига, порожденный оператором Лапласа-Бесселя - $\Delta_{B_{m+k,k}}(x)$, в одномерном случае который введен Б.М. Левитаном, и назван оператором обобщенного или Бесселева сдвига (коротко ООС).

Но фундаментальное решение простейшего уравнения $\Delta_B u=f$ в двумерном случае (т.е. когда $m=1,\ k=1$) впервые было построено А. Вайнштейном.

В отличие от классического Гармонического Анализа Фурье, в теории Гармонического Анализа, ассоциированного с преобразованием Фурье-Бесселя. рассматриваются сверточные структуры, порожденные необычными, а обобщенными сдвигами T^y. И потому исследования указанных выше задач сталкиваются с принципиальными трудностями, связанными с тем, что «верхнее» полупространство $R^+_{m+k,k}$ и «верхняя» полусфера S^+ - оба являются многообразиями с краем и ООС T^y не обладает многими свойствами которыми обладает обычный сдвиг τ^h, $(h\in R_n)$.

Диссертационная работа посвящена изучению основных интегральных операторов гармонического анализа Фурье-Бесселя и проводимые исследования группируются в основном в двух направлениях:

1. Расширение класса интегральных операторов Гармонического анализа Фурье-Бесселя, для которых верны неравенства типа неравенств Харди-Литтлвуда-Соболева и Соболева-Ильина.
2. Построение новых шкал функциональных пространств и изучение действия в этих шкалах основных интегральных операторов гармонического анализа Фурье-Бесселя.

Первые работы в этом направлении принадлежат И.А.Киприянову, М.И.Ключанцеву. Их дальнейшее развитие относятся к работам А.Д. Гаджиева, И.А.Алиева, С.К. Абдуллаева, В.С.Гулиева и их ученикам.

Неравенство типа Харди-Литтлвуда-Соболева для B-потенциала Рисса I_B^{α} $(\alpha > 0)$ в шкале пространств $L_{p,\nu}$, впервые получено в работе А.Д.Гаджиева и И.А.Алиева. В направлении установления таких оценок для интегральных операторов B-гармонического анализа в различных метриках, особое место занимает работы В.С.Гулиева и его учеников .

В работах М.Г.Гаджибекого и С.Г.Самко,эта задача рассматривается в других постановках с обобщением и расширением понятия рассматриваемых свёрточных операторов и многообразия интегрирования.

Отметим также работы Р.А. Бандалиева, где рассматривается вопрос ограниченности одномерного оператора Харди в пространстве Лебега с переменным показателем.

Одним из способов для расширения класса операторов является рассмотрение нестепенных ядер и более слабые условия, чем аддитивность, например, субаддитивность и тем самым охватить максимальные функции, дробно-максимальные функции и т.д. Но, как известно, обобщенные потенциалы Рисса-Бесселя (даже обычные потенциалы Рисса) с нестепенными ядрами не действуют, вообще говоря, в шкале $L_{p,\nu}$ пространств.

Впервые в работах С.К.Абдуллаева и З.А.Дамировой, С.К.Абдуллаева и Б.К.Агарзаева, оценки Харди-Литтлвуда-Соболева распространены на случай потенциалов Рисса с нестепенными ядрами в случаях обычного и обобщенного сдвига T^y, соответственно.

Новые шкалы функциональных пространств могут быть представлены как пространства определяемыми в терминах интегральных характеристик типа Ω_p и Ω_p^* локально суммируемых функций. Изучение интегральных операторов классического гармонического анализа Фурье в терминах характеристик типа Ω_p, Ω_p^* берет начала из работ С.К.Абдуллаева и А.А.Бабаева, Е.Г.Гусейнова и В.В.Салаева в одномерном случае и С.К.Абдуллаева в многомерном.

В этих исследованиях отправным пунктом является установление оценок связывающих эти характеристики образа с той же характеристикой прообраза оператора из определенного класса. В работах С.К.Абдуллаева и Н.Р.Карамалиева, аналогичные исследования впервые проводятся для операторов гармонического анализа Фурье-Бесселя в случае, когда обобщенный сдвиг берется только по одной переменной .

В диссертации, в частности, и эти результаты переносятся на случай, когда обобщенный сдвиг берется по произвольному набору координат и строятся также и новые шкалы пространств.

Цель работы.

1.Исследовать задачи установления сильных и слабых неравенств типа неравенств Харди-Литтлвуда-Соболева и Соболева-Ильина, с единой позиции, для обобщенных потенциалов Рисса и Бесселя, максимальных и дробно-максимальных функций, порожденных операторами как обычного, так и обобщенного сдвига, ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя.

2. Изучить действие субаддитивных операторов из довольно широкого класса, содержащего, в частности, сингулярные интегральные операторы, потенциалы Рисса и Бесселя, максимальные функции, дробно-максимальные функции, интегралы Пуассона, ассоциированные дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя, в новых шкалах банаховых пространств, определяемых в терминах интегральных характеристик типа Ω и Ω^* .

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- введен достаточно широкий класс субаддитивних операторов, содержащий обобщенных дробно-максимальных функций, потенциалов Рисса и Бесселя и других, мажорирующихся операторами из определенного класса интегральных сверток типа потенциалов Рисса, с почти монотонными ядрами, порожденными операторами как обычного, так и обобщенного сдвига, ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя. И для операторов этого класса доказаны теоремы о сильных и слабых неравенств типа неравенств Харди-Литтлвуда-Соболева и Соболева-Ильина о следах функций представимых операторами этого класса. как операторов из $L_{p,\gamma}$ пространства в некоторое пространство Орлича и показана их точность.
- введены, достаточно широкий класс субаддитивних операторов, содержащий, в частности, основные интегральные операторы гармонического анализа Фурье-Бесселя, как сингулярные интегральные операторы, потенциалы Рисса и Бесселя, максимальные

функции, дробно-максимальные функции, интегралы Пуассона, а также введены интегральные характеристики Ω и Ω^*, локально интегрируемых функций, в терминах которых установлены оценки, связывающие те же характеристики образа и прообраза операторов из введенного класса.

- проводятся конструкции связанные с характеристиками Ω и Ω^*, которые в частности, приводят к весовым $L_{p,\gamma}$ пространствам как с монотонно возрастающими, так и монотонно убывающими весами соответственно, а также к пространствам типа Морри, и доказываются теоремы об ограниченности в шкале таких пространств, для операторов из введенного класса.

Общая методика исследований. В диссертации применяются методы теории функций и функционального анализа, теории интегральных операторов гармонического анализа, теории потенциала.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы в различных задачах гармонического анализа Фурье и Фурье-Бесселя.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах кафедры «Математический анализ» в БГУ (проф. С.К.Абдуллаев), на семинарах отдела «Математический анализ» ИММ НАН Азербайджана (чл.-корр. НАН Азербайджана, проф. В.С.Гулиев). Результаты диссертации докладывались автором, также на республиканской конференции по «Актуальным проблемам математики и механики» посвященной 91-летнему юбилею Президента Азербайджанской Республики Г.А.Алиева (Баку, 2014); на международной конференции посвященной 55-летию ИММ НАН Азербайджана (Баку, 2014); на конференции по «Актуальным проблемам математики и механики», посвященной 95-летию БГУ (Баку, 2014); на республиканской конференции по «Актуальным проблемам математики и механики», посвященной 92-летнему юбилею Президента Азербайджанской Республики Г.А.Алиева (Баку, 2015); на Международной конференции MADEA-7 (Баку, 2015); Республиканская научная конференция "Функциональный анализ и его применения", посвященная 100-летию со дня рождения А.Габибзаде (Баку,2016**)**; на международной конференции по «Современные проблемы математики и механики» , посвященной 80-летию академика Акифа Гаджиева, (Баку, 2017**).**

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего102 наименований.Объем диссертации состоит из 132 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введение обосновывается актуальность темы, приводится краткий исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе исследуется задача установления сильных и слабых неравенств типа неравенств Харди-Литтлвуда-Соболева и Соболева-Ильина для субаддитивних операторов мажорирующихся операторами из определенного класса интегральных сверток типа потенциалов Рисса, с почти монотонными ядрами, порожденными операторами как обычного, так и обобщенного сдвига, ассоциированного с дифференциальным оператором Лапласа-Бесселя.

В первом параграфе этой главы введены основные понятия, которые используются в диссертационной работе и класс субаддитивних операторов, для которых устанавливаются сильные и слабые неравенства типа неравенств Харди-Литтлвуда-Соболева и Соболева-Ильина.

Пусть R^l - эвклидово пространство размерности l и $m,k \ge 0$, целые числа, $n = m+k \ge 1$,

$R^+_{m+k,k} = \{(x_1,\ldots,x_{m+k}) \in R^{m+k} : x_{m+i} > 0,\ i = 1,\ldots,k\}$, $R^+_{m+0,0} \equiv R^m$.

$$T^y_{\gamma_{n,k}}(u(x)) == c_\nu \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi u(x' - y', (x_{m+1}, y_{m+1})_{\alpha_1}, \ldots, (x_{m+k}, y_{m+k})_{\alpha_k})$$

$$\prod_{i=1}^{m+k} \sin^{\gamma_{m+i}-1} \alpha_i d\alpha_i$$

оператор обобщенного сдвига (ООС), порожденный оператором Лапласа-Бесселя - $\Delta_{B_{m+k,k}}$, где $x', y' \in R^m$, $x = (x', x_{m+1}, \ldots, x_{m+k})$,

$y=(y', y_{m+1},..., y_{m+k})$, $\quad (x_{m+i}, y_{m+i})_{\alpha_i} = \sqrt{x_{m+i}^2 - 2x_{m+i}y_{m+i}\cos\alpha_i + y_{m+i}^2}$,
$i=1,..., k$, $\quad C_\nu$ - нормирующий множитель.

В дальнейшем положим

$$\gamma_{n,k} = (0,\dots,0,\gamma_{m+1},\dots,\gamma_{m+k}) \in R^+_{m+k,k}, \ |\gamma_{n,k}| = \sum_{i=1}^{k}\gamma_{m+i},$$

а также

$$y^{\gamma_{n,k}} = \prod_{i=1}^{m+k} y_i^{\gamma_i} = y_{m+1}^{\gamma_{m+1}}\dots y_{m+k}^{\gamma_{m+k}}, \ d\mu_{n,k}(y) = y^{\gamma_{n,k}}dy,$$

если $y \in R^+_{m+k,k}$.

В обозначении $\gamma_{n,k}$, n указывает на размерность этого вектора, а k на количество его положительных координат.

Замечание 1. Если $k=0$, то будем считать, что
$\gamma_{n,k} = (0,\dots,0) \in R^m$, $T^y_{\gamma_{n,k}} f(x) = f(y-x)$ - обычный сдвиг и
$d\mu_{n,k}(y) = dy$.

Когда $G \subseteq R^+_{n,k}$ измеримое множество и $p \geq 1$,

$$L_{p,\gamma_{n,k}}(G) = \left[f - изм.: \left\| f : L_{q,\gamma_{n,k}}(G) \right\| = \left(\int_G |f(y)|^p \, d\mu_{\gamma_{n,k}}(y) \right)^{1/p} < +\infty \right]$$

пространство функций суммируемых в p-ой степени на множестве G

Определение 1. Функция $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ называется $N-$ функцией, если она представлена в виде

$$\Phi(r) = \int_0^r a(t)dt$$

где $a:[0,\infty) \to [0,\infty)$ непрерывна слева, неубывающая функция такая, что $a(0)=0$ и $a(t) \to \infty$, если $t \to \infty$.

Всюду в дальнейшем

$$L^\Phi_{\gamma_{n,r}}(R^+_{m+k,k}) = \left\{ f : \int_{R^+_{m+k,k}} \Phi(\varepsilon|f(x)|) d\mu_{n,k}(x) < \infty, \ \forall \varepsilon > 0 \right\} -$$

пространство Орлича определённое $N-$функцией Φ.

Когда $\Phi(t)=|t|^p$, $t>0$ и $1\le p<+\infty$, $L^{\Phi}_{\gamma_{n,r}}(R^+_{m+k,k})$ есть пространство $L_{p,\gamma_{n,k}}(R^+_{m+k,k})$.

Когда $n=m+k\ge 2$ и $s\in\{1,\dots,n-1\}$, пространство $R^+_{n,k}$ разбиваем на прямую сумму пространства R^+_{s,k_s} точек ${}_s x=(x_{n_1},\dots,x_{n_s})$, (с координатами $x_{n_1},\dots,x_{n_s}$, где $1\le n_1<\dots<n_s\le n$ и эти координаты фиксируются для дальнейших рассуждений) и пространства $R^+_{n-s,(k-k_s)}$ точек ${}_s x'$, так что $x=\uparrow({}_s x,{}_s x')\in R^+_{n,k}$.

Пусть $m_s=rang(\{n_1,\dots,n_s\}\cap\{1,\dots,m\})$

и $k_s=rang(\{n_1,\dots,n_s\}\cap\{m+1,\dots,m+k\})$ тогда m_s,k_s целые числа, такие что, $0\le m_s\le m$, $0\le k_s\le k$ и $m_s+k_s=s$.

Если $m_s>0$, $(k_s>0)$, то полагаем

$$\{n_1,\dots,n_s\}\cap\{1,\dots,m\}=\{j_1,\dots,j_{m_s}\},\ j_1<\dots<j_{m_s},$$

$$\{n_1,\dots,n_s\}\cap\{m+1,\dots,m+k\}=\{m+i_1,\dots,m+i_{k_s}\},\ i_1<\dots<i_{k_s}$$

тогда, очевидно

$${}_s y=(y_{j_1},\dots,y_{j_{m_s}},y_{m+i_1},\dots,y_{m+i_{k_s}})$$

и $d_s y=dy_{j_1}\dots dy_{j_{m_s}}dy_{m+i_1}\dots dy_{m+i_{k_s}}$.

А также, если $k_s>0$, то

$$\gamma_{s,k_s}=(0,\dots,0,\gamma_{i_1},\dots,\gamma_{i_{k_s}})\in R^+_{s,k_s},\ |\gamma_{s,k_s}|=\gamma_{i_1}+\dots+\gamma_{i_{k_s}},$$

$${}_s y^{\gamma_{s,k_s}}=y_{m+i_1}^{\gamma_{i_1}}\dots y_{m+i_{k_s}}^{\gamma_{i_{k_s}}},\ d\mu_{k_s,s}={}_s y^{\gamma_{k_s,s}}d_s y.$$

В этих обозначениях также полагаем

$m'_s=m-m_s$, $k'_s=k-k_s$, $R^+_{s,k_s}\equiv R^+_{m_s+k_s,k_s}$, $R^+_{n-s,k-k_s}\equiv R^+_{m'_s+k'_s,k'_s}$

Далее, $\gamma_{n-s,k'_S}, y^{n-s,k'_S}$ и $d\mu_{n-s,k'_S}(y)$ определяются из равенств $\gamma_{n,k} = \uparrow(\gamma_{s,k_S}, \gamma_{n-s,k'_S})$, $y^{\gamma_{n,k}} = y^{\gamma_{s,k_s}} y^{\gamma_{n-s,k'_S}}$, $d\mu_{n,k}(y) = d\mu_{s,k_s}(y)\, d\mu_{n-s,k'_s}(y)$ соответственно.

Определение 2. Положительная функция $g(t)$ почти убывает (почти возрастает) на множестве $X \subset (0;+\infty)$, если существует постоянное $c_g^{\uparrow} > 0$ $(c_g^{\downarrow} > 0)$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in X$, $t_1 < t_2$,

$$g(t_2) \le c_g^{\uparrow} g(t_1) \;\; (g(t_1) \le c_g^{\downarrow} g(t_2)).$$

Определение 3. Пусть $\Omega_{p,\alpha}$ $(\tilde{\Omega}_{p,\alpha})(p \ge 1, \alpha > 0)$ совокупность функций $\omega : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ таких, что $\omega(t)$ возрастает (почти возрастает), $t^{-(\alpha/\mathrm{p})+\varepsilon}\omega(t)$ убывает (почти убывает) при малых $\varepsilon > 0$ и сходится интеграл $\int_0 \omega(t)dt$.

Очевидно, $\Omega_{p,\alpha} \subset \Omega_{1,\alpha}$, $\tilde{\Omega}_{p,\alpha} \subset \tilde{\Omega}_{1,\alpha}$ и если $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,\alpha}$, то $\omega(2t) \le C\omega(t)$.

Определение 4. Оператор A называется субаддитивным, если для любых $\lambda, \mu > 0$ и любых функций f и g из области определения оператора A

$$|A(\lambda f + \mu g)(x)| \le \lambda |A(f)(x)| + \mu |A(g)(x)|$$

Определение 5. Субаддитивный оператор A принадлежит классу $K_{\gamma_{n,k}}(p, \tilde{\Omega}_{p,\alpha})$, если

1) $Af(x)$ существует почти для всех $x \in R^+_{m+k,k}$, когда $f \in L_{p,\gamma_{n,k}}(R^+_{m+k,k})$ и

2) существуют $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,\alpha}$ и $C > 0$ такие, что

$$|Af(x)| \le C \int_{R^+_{m+k,k}} T^y(|f(x)|)\omega(|y|)|y|^{-(m+k+|\gamma_{n,k}|)} d\mu_{n,k}(y).$$

Пусть $\omega \in \tilde{\Omega}_{p,\alpha}$, $\alpha = m + k + |\gamma_{n,k}|$. Тогда непосредственно из определения следует, что

1.Обобщенный потенциал Рисса

$$I_B^{\omega}(f)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y\big(f(x)\big)\omega\big(|y|\big)|y|^{-(m+k+|\gamma|_{n,k})}\,d\mu_{n,k}(y)$$

2.Обобщенный потенциал Бесселя

$$(J_B^{\omega}f)(x)=\int\limits_{R^+_{m+k,k}} T^y\big(f(x)\big)G^{\omega}_{\gamma_{n,k}}(y)d\mu_{n,k}(y),$$

$$G^{\omega}_{\gamma}(x)=c^{\omega}_{\gamma}\int\limits_0^{\infty}\frac{\omega(\delta^{1/2})}{\delta^{(m+k+|\gamma|)/2}}e^{-\frac{\delta}{4\pi}-\frac{|x|^2\pi}{\delta}}\frac{d\delta}{\delta},$$

c^{ω}_{γ} - нормирующий множитель такой, что $\left\|G^{\omega}_{\gamma}\right\|_{1,\gamma}=1$.

3. Обобщенная B-дробно-максимальная функция

$$M^{\omega}_{\gamma_{n,k}}f(x)=\sup_{r>0}\frac{\omega\left(|B(0,r)|^{1/\alpha}_{\gamma_{n,k}}\right)}{|B(0,r)|_{\gamma_{n.k}}}\int\limits_{B(0,r)}T^y\left|f(x)d\mu_{n,k}(y)\right|,$$

$$B(0,r)=\{y\in R^+_{m+k,k}:|y|<r\},\quad \|B(0,r)|_{\gamma_{n,k}}=\int\limits_{B(0,r)}d\mu_{n,k}(y)$$

принадлежат классу $K_{\gamma_{n,k}}(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha})$.

В разделе 1.2 доказывается основная теорема о неравенствах типа неравенств Харди – Литтлвуда –Соболева для операторов из класса $K_{\gamma_{n,k}}(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha})$.

Теорема 1. Пусть, $1\le p<+\infty$ и $A\in K_{\gamma_{n,k}}(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha})$, $k\ge 0$, $\alpha=m+k+\left|\gamma_{k,n}\right|$. Тогда существует N - функция Φ такая, что

$$C^{-1}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right)\le\frac{1}{r^{\frac{a}{p}}}\int\limits_0^r\frac{\omega(t)}{t}dt\le C\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^a}\right),\ r>0$$

где Φ^{-1} обратная функции Φ, ω- функция из определения класса $K_{\gamma_{n,k}}(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha})$, C - постоянная, независящая r и

$a)$ если $p>1$, то $\exists C>0,\ \forall f\in L_{p,\gamma_{n,k}}\left(R^+_{m+k,k}\right)$,

$$\|Af\|_{L^{\Phi}_{\gamma_{n,k}}(R^+_{m+k,k})}\le C\|f\|_{L_{p,\gamma_{n,k}}};$$

$б)$ если $p=1$, то $\exists C>0,\ \forall f\in L_{1,\gamma_{n,k}}\left(R^+_{m+k,k}\right), \forall\beta>0$,

$$\int\limits_{\{x:|Af(x)|>2\beta\}} d\mu(x)\le\left\{\Phi\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L^{-1}_{\gamma_{n,k}}}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}$$

Приведен пример указывающий на точность теоремы.

Отметим, что когда $\omega(t)=t^s, 0\le s<a=m+k+|\gamma|, I^{\omega}_{B}$ - потенциал Рисса порядка s, J^{ω}_{B}-потенциал Бесселя порядка s, а $M^{\omega}_{\gamma}f(x)$ есть B-дробно-максимальная функция - $M^{s}_{\gamma}f(x)$, (если $k=0,$ то I^{ω}_{B} и J^{ω}_{B} есть обычные потенциалы Рисса и Бесселя, соответственно).

В разделе 1.3 этой главы устанавливаются неравенства Соболева-Ильина для операторов из класса $K_{\gamma_{n,k}}(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha})$.

Пусть $n=m+k\ge 2$ и $s\in\{1,\dots,m+k-1\}$.

Введем обозначения

$$a_{s,k_s}=s+\left|\gamma_{s,k_s}\right|,\ \ \omega_{p,a_{s,k_s}}(t)=\omega(t)t^{-a_{s,k_s}/p}.$$

Доказывается

Теорема 2. Пусть $1\le p<+\infty, k\ge 0,\ m\ge 0,\ n=m+k\ge 2$, $A\in K_{\gamma_{n,k}}(p,\tilde{\Omega}_{p,\alpha_{n,k}})$ и ω соответствующая функция. Если $s\in\{1,\dots,m+k-1\}, 0\le m_s\le m, 0\le k_s\le k$, $\omega_{p,a_{n-s,k'_s}}\in\tilde{\Omega}_{p,a_{s,k_s}}$, то существует N-функция $\Phi=\Phi_{p,s}$ такая, что

$$\Phi^{-1}_{p,s}(r^{-a_{s,k_s}})\sim r^{-a_{s,k_s}/p}\int_0^r\omega_{p,a_{n-s,k'_s}}(t)t^{-1}dt,\quad r>0,\ \text{и}$$

$a)$ если $p>1$, то существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L_{p,\gamma_{n,k}}(R^+_{m+k,k})$ и ${}_s x'\in R^+_{n-s,k'_s}$

$$\|(Af)(\cdot,{}_s x')\|_{L^{\Phi_{p,s}}_{\gamma_{s,k_s}}(R^+_{s,k_s})} \le C\|f\|_{p,\gamma_{n,k}}(R^+_{m+k,k}),$$

б) существует $C>0$ такое, что для любой функции $f\in L_{1,\gamma_{n,k}}(R^+_{n,k})$, для любого $\beta>0$ и ${}_s x'\in R^+_{n-s,k'_s}$

$$\int\limits_{\{x:|(Af)(\cdot,{}_s x')|>2\beta\}} d\mu(x) \le \left\{\Phi_{1,s}\left[\left(\frac{c}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma_{n,k}}(R^+_{n,k})}\right)^{-1}\right]\right\}^{-1}.$$

Во второй главе рассматривается вопрос об ограниченности интегральных операторов гармонического анализа в пространствах определенных в терминах локальных характеристик функций. В 2.1 вводятся некоторые определения, обозначения и предварительные сведения.

С целью изучения, с единой позиции, более широкого класса операторов вводится класс $\overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$.

Определение 6. Пусть $1\le p\le q<+\infty$. Скажем, что субаддитивный оператор A принадлежит классу $\overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$, если $A: L_{p,\gamma_{n,k}}(R^+_{n,k})\to L_{q,\gamma_{n,k}}(R^+_{n,k})$ ограничен и для любой функции $u\in L_{p,\gamma_{n,k}}(R^+_{n,k})$ с компактным носителем,

$$|Au(x)|\le c\int\limits_{R^+_{m+k,k}} |y|^{-\beta} T^y_{\gamma_{n,k}}|u(x)|d\mu_{\gamma_{n,k}}(y),\ x\notin \operatorname{sup} pu,$$

где $\beta=\left(m+k+|\gamma_{n,k}|\right)\left((1/p')+q^{-1}\right)$и C не зависит от u.

В случае $p=q$, операторы $A\in\overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$ могут быть сингулярными. $B_{\gamma_{n,k}}$ - интеграл Пуассона:

$$\left(U_{\gamma_{n,k}}f\right)(x)\overset{df}{=}\sup_{t>0}\int\limits_{R^+_{m+k,k}} t\left(t^2+|y|^2\right)^{-\frac{m+k+1+|\gamma_{n,k}|}{2}} T^y_{\gamma_{n,k}}(f(x))d\mu_{n,k}(y)$$

и $B_{\gamma_{n,k}}$ - максимальная функция

$$M_{\gamma_{n,k}} f(x) = \sup_{r>0} \left|B(0,r)\right|_{\gamma_{n,k}}^{-1} \int_{B(0,r)} T_{\gamma_{n,k}}^{y} \left|f(x)\right| d\mu_{n,k}(y)$$

принадлежат $\overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,p)$, если $p>1$.

А также, I_B^{ω}, $J_B^{\omega}, M_{\gamma_{n,k}}^{\omega} \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$, при $1<p<q<\infty$,

$\omega(t)=t^s$ и $s=\left(m+k+\left|\gamma_{n,k}\right|\right)\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\right)$.

В 2.2 рассматривается случай пространств определенных в терминах $\Omega_{p,\mu_{n,k}}^{({}_s x)}$ характеристик функций и приводятся основные теоремы.

Когда $s \in \{1,\ldots,m+k\}$, $A_{p,\gamma_{n,k}}({}_s x)$ обозначает совокупность всех функций, измеримых на множестве $R_{m+k,k}^{+}$ и принадлежащих $L_{p,\gamma_{n,k}}(\{x \in R_{m+k,k}^{+} : \left|{}_s x\right| \geq \xi\})$, для каждого числа $\xi>0$ и $\overline{\alpha}_{p,s} = \left(s+\left|\gamma_{s,k_s}\right|\right)/p'$.

Для функций $u \in A_{p,\gamma_{n,k}}({}_s x)$ вводим характеристику

$$\Omega_{p,\mu_{n,k}}^{({}_s x)}(u,\xi) = \left\{ \int_{\{x \in R_{m+k,k}^{+} : \left|{}_s x\right| \geq \xi\}} \left|u(x)\right|^p d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/p}, \ \xi>0$$

и множество

$$J_{p,\mu_{n,k}}({}_s x) =$$

$$= \left\{ u \in A_{p,\mu_{n,k}}({}_s x) : \int_0^{\xi} t^{\overline{\alpha}_{p,s}-1} \Omega_{p,\mu_{n,k}}^{({}_s x)}(u,t)\,dt < +\infty, \ \forall \xi>0 \right\}$$

Определение 7. Неотрицательная функция $\varphi(t)$, $0<t<\infty$, принадлежит множеству N, если при малых $\varepsilon>0$, для почти всех $t \in (0,\varepsilon)$ $\varphi(t)>0$, и $\forall\ \varepsilon>0$ сходится интеграл $\int_0^{\varepsilon} \varphi(t)\,dt$.

Пусть $1 \le p < \infty$ и $\varphi \in N$. Введем, пространство

$$I^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) = \left\{ u - изм. \left\| u : I^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) \right\|^p \stackrel{df}{=} \int_0^{+\infty} \left(\Omega^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(u,\xi) \right)^p \varphi(\xi) d\xi < +\infty \right\}.$$

Пусть

$$L_{p,\mu_{n,k}}(\omega : G) = \left[f - изм.: \left\| f : L_{p,\mu_{n,k}}(G) \right\| = \right.$$

$$\left. = \left(\int_G \left| f(y)\omega(y) \right|^p d\mu_{n,k}(y) \right)^{1/p} < +\infty \right]$$

- $L_{p,\mu_{n,k}}(G)$ пространство с весом $\omega(y)$.

Основные результаты 2.2 даны в следующих двух теоремах.

Теорема 3. Пусть $A \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$, $s \in \{1,\ldots,m+k\}$ и $u \in J_{p,\mu_{n,k}}(_s x)$. Тогда, для почти всех $x \in R^+_{m+k,k}$ существует $\mathrm{v}(x) = A(u)(x)$ и имеет место оценка

$$\Omega^{(_s x)}_{q,\mu_{n,k}}(\mathrm{v},\xi) \le c\xi^{-\overline{\alpha}_{p,s}} \int_0^{\xi} t^{\overline{\alpha}_{p,s}-1} \Omega^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(u,t)dt, \ \xi > 0$$

где постоянная c не зависит от u и ξ.

Теорема 4. Пусть $1 < p \le q < \infty$, $A \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$, $\varphi, \psi \in N$, $s \in \{1,\ldots,m+k\}$, и выполняется условие

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^{\infty} \left| \xi^{-\overline{\alpha}_{p,s}} \psi^{1/q}(\xi) \right|^q d\xi \right)^{1/q} \left(\int_0^{\infty} \left| \varphi^{1/p}(\xi) \xi^{(1-\overline{\alpha}_{p,s})} \right|^{-p'} d\xi \right)^{1/p'} < \infty$$

Тогда оператор A действует из пространства $I^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi)$ в $I^{(_s x)}_{q,\mu_{n,k}}(\psi)$ и имеет место неравенство

$$\left\| Au : I^{(_s x)}_{q,\mu_{n,k}}(\psi) \right\| \le c \left\| Au : I^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) \right\|,$$

где c не зависит от функции u.

Доказательства этих теорем приводятся в 2.4. С этой целью в 2.3 устанавливаются поточечные и интегральные неравенства в терминах $\Omega^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}$ характеристик. Далее на базе теоремы 4. с учетом того, что $I^{(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) = L_{p,\nu}\left(\omega\left(|_s x|\right), R^+_{m+k,k}\right)$ и соответствующие нормы эквивалентны, если $\varphi \in N$ и $\omega^p(t) = \int_0^t \varphi(\xi) d\xi$, получаем теорему об ограниченности оператора $A \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$ из пространства $L_{p,\gamma_{n,k}}\left(\omega\left(|_s x|\right); R^+_{n,k}\right)$ в пространство $L_{q,\gamma_{n,k}}\left(\omega_1\left(|_s x|\right); R^+_{n,k}\right)$ при определенных условиях на p, q, ω, ω_1.

В 2.5, 2.6 и 2.7 проведенные в 2.2, 2.3, 2.4 исследования проводятся в терминах $\Omega^{*(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}$ характеристик функций.

В 2.5 приводятся основные теоремы. Аналогично предыдущему случаю, вводится характеристика

$$\Omega^{*(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(u,\xi) = \left\{ \int\limits_{\{x \in R^+_{m+k,k} : |_s x| \le \xi\}} |u(x)|^p d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/p}, \ \xi > 0,$$

и устанавливается оценка для $\vee(x) = A(u)(x)$, при $A \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$:

$$\Omega^{*(_s x)}_{q,\mu_{n,k}}(\vee,\xi) \le c\xi^{\alpha^*_{q,s}} \int\limits_{\xi}^{+\infty} t^{-(\alpha^*_{q,s}+1)} \Omega^{*(_s x)}_{q,\mu_{n,k}}(u,t)dt, \ \xi > 0,$$

где $\alpha^*_{q,s} = \left(s + \left|\gamma_{s,k_s}\right|\right) / q$ и постоянная c не зависит от u и ξ.

Отметим, что эта оценка новая и в случае обычного сдвига по всем координатам.

На базе этой оценки операторы $A \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$ изучаются в шкале пространств

$$I^{*(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) = \left\{ u - изм. \left\| u : I^{*(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) \right\|^p \overset{df}{=} \int\limits_0^{+\infty} \left(\Omega^{*(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(u,\xi) \right)^p \varphi(\xi) d\xi < +\infty \right\}$$

Тем самым и в шкале пространств $L_{p,\nu}\left(\omega\left(|_s x|\right), R^+_{m+k,k}\right)$ (с монотонно убывающими весами) с учетом того, что

$$I^{*(_s x)}_{p,\mu_{n,k}}(\varphi) = L_{p,\nu}\left(\omega(|_s x|), R^+_{m+k,k}\right)\omega^p(t) = \int_t^\infty \varphi(\xi)d\xi\ ,\ t > 0.$$

Полученные в главе II, оценки в терминах введенных характеристик становятся отправным пунктам при изучении операторов в различных шкалах банаховых пространств, определенных в терминах этих же характеристик, одним из которых являются шкалы пространств типа Морри. Этой же задаче посвящена глава III.

Приведем основной результат главы

Теорема 5. Пусть $1 < p \le q < +\infty$, $A \in \overline{K}_{\gamma_{n,k}}(p,q)$ и $0 < \eta < (n + |\gamma_{n,k}|)/p'$. Тогда,

1) Если $\sup\limits_{t>0} t^\eta \left\{ \int\limits_{|x|\ge t} |u(x)| d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/p} \le C_u$, то

$\sup\limits_{t>0} t^\eta \left\{ \int\limits_{|x|\ge t} |Au(x)|^q d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/q} \le cC_u$, где c не зависит от функции u;

2) Если $\lim\limits_{t\to 0} t^\eta \left\{ \int\limits_{|x|\ge t} |u(x)| d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/p} = 0$, то

$\lim\limits_{t\to 0} t^\eta \left\{ \int\limits_{|x|\ge t} |Au(x)|^q d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/q} = 0$.

А также, при $-(n + |\gamma_{n,k}|)/q < \eta < 0$,

3) Если $\sup\limits_{t>0} t^\eta \left\{ \int\limits_{|x|\le t} |u(x)| d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/p} \le C_u$,

$\sup\limits_{t>0} t^\eta \left\{ \int\limits_{|x|\le t} |Au(x)|^q d\mu_{n,k}(x) \right\}^{1/q} \le cC_u$, где c не зависит от функции u

4) Если $\lim_{t\to 0} t^{\eta}\left\{\int_{|x|\le t}|u(x)|\,d\mu_{n,k}(x)\right\}^{1/p}=0$, то

$$\lim_{t\to 0} t^{\eta}\left\{\int_{|x|\le t}|Au(x)|^{q}\,d\mu_{n,k}(x)\right\}^{1/q}=0.$$

В конце выражаю свою искреннюю благодарность своему научному руководителю проф. С.К.Абдуллаеву за постановку задач и обсуждение научных результатов.

Основное содержание диссертации опубликованов следующих работах:

1. Abdullayev S.K., Məmmədov E.Ə.,AbuzərovaS.H. Bəzi subxətli operatorların diskret analoqlarının l_N^P fəzalarında məhdudluğu // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 91-ci ildönümünə həsr olunmuş respublika elmi konfransının materialları, 2014, 10-11.

2. Abdullayev S.K., Məmmədov E.Ə., AbuzərovaS.H. l_N^p fəzaları şkalasında bəzi subxətti operatorların diskret analoqları üçün bəzi qiymətləndirmələr // Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 91-ci ildönümünə həsr olunmuş respublika elmi konfransının materialları, 2014, 7-9.

3. Абдуллаев С.К., Мамедов Э.А. Оценки типа Харди-Соболева для потенциалов Бесселя с обобщенным сдвигом и почти монотонным ядром // Научная конференция «Актуальные проблемы математики и механики», посвященная 95-летию БГУ, Баку, 2014 с.7-9.

4. Abdullayev S.K., Mammadov E.A., Bayramova L.M. The limitation of sublined operator`s discrete analogues on the discrete morrey spaces // İnternational conference devoted to 55-th anniversary of the IMM,2014, p.71-73.

5. Abdullayev S.K., Məmmədov E.Ə., Mirzəyeva L.M. Ümumiləşmiş kəsr maksimal funksiyalar üçün bəzi qiymətləndirmələr //Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2015, s.3.4.

6. Abdullayev S.K., Məmmədov E.Ə., Mirzəyeva L.M. Dəyişən dərəcəli Morri fəzalarında sinqulyar və zəif sinqulyar inteqral operatorların məhdudluğu //Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2015, s. 5-6.
7. Abdullayev S.K., Mammadov E.A. On a class of subadditive operators with generalized shift //Azerbaijan-Turkey-Ukrainian International scientific conference, MADEA-7, 2015, p.5-6.
8. Абдуллаев С.К., Мамедов Э.А. Неравенства Харди-Литтлвуда-Соболева для одного класса субаддитивних операторов с бобщенным сдвигом // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2016, №1, 16-25.
9. Мамедов Э.А. Неравенства Харди-Литтлвуда-Соболева для потенциалов Бесселя и дробно максимальных функций //Республиканская научная конференция "Функциональный анализ и его применения", посвященная 100-летию со дня рождения А.Габибзаде. 2016, s.171-172.
10. Мамедов Э.А. Интегральные операторы гармонического анализа в пространствах определенных в терминах локальных характеристик функций //Известия педагогического университета, 2017 , Сер.65, №4, с 27-37.
11. Абдуллаев С.К., Мамедов Э.А., Гаджиева Ж.Б. Некоторые оценки интегральных операторов гармонического анализа в терминах локальных характеристик функций//Тезисы респ. конф. посв. 94-летию со дня рождения общенац. лидера Гейдара Алиева, Баку, 2017, с.138-141.
12. Abdullayev S.K., Mammadov E.A. Sobolev-Il'in Inequality for a Class of Generalized Shift Subadditive Operators // Nonlinear Analysis and Diferential Equations, Vol.5, 2017, №2, p.75-88.
13. Abdullayev S.K., Mammadov E.A. Integral operators of harmonic analysis is spaces determined in terms of local characteristic functions // International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.114-3, 2017, p.65-73.
14. Abdullayev S.K., Mammadov E.A. Integral operators of harmonic analysis is spaces determined in terms of local characteristic functions II // International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.115-2, 2017, p.419-443.
15. Abdullayev S.K.,Mammadov E.A. Integral operators of Laplace-Bessel harmonic analysis in spaces determined in the terms of local characteristic functions / Modern problems of mathematics and mechanics.

Proceedings of the International conference devoted to the 80-th anniversary of academician Akif Gadjiev, 2017, p.10-11.
16. Абдуллаев С.К., Мамедов Э.А.Об одном свойстве обобщенного интеграла Пуассона // Тезисы респ. конф. посв. 95-летию со дня рождения Гейдара Алиева, Баку, 2018, 111-113.

ELÇİN ƏLİ OĞLU MƏMMƏDOV

FUNKSİYALARIN LOKAL XARAKTERİSTİKALAR TERMİNİNDƏ TƏYİN OLUNMUŞ FUNKSİONAL FƏZALARDA HARMONİK ANALİZİN İNTEQRAL OPERATORLARI

XÜLASƏ

Dissertasiya işi Furye-Bessel Harmonik Analizin əsas inteqral operatorlarının öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Dissertasiyada aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

1.Ümumiləşmiş kəsr – maksimal funksiyaları Riss və Bessel potensiallarını və başqalarını saxlayan, müəyyən sinifdən olan, adi və eləcədə Laplas-Bessel diferensial operatoru ilə assosiasiya olunmuş ümumiləşmiş sürüşmə ilə sanki monoton nüvəli Riss potensialları tipli bükmə operatorları ilə majorantlanan, subadditiv operatorların kafi qədər geniş sinfi daxil edilmiş və bu sinifdən olan operatorlar üçün $L_{p,\gamma}$ fəzasından hər hansı Orliç fəzasına təsir göstərən operator kimi Xardi-Litllvud-Sobolevvə Sobolev-İlyin bərabərsizlikləri tipli güclü və zəif bərabərsizliklər haqqında teoremlər isbat olunmuş və onların daxil edilmiş operatorlar sinfində dəqiqliyi göstərilmişdir.

2. Xüsusi halda, Laplas-Bessel diferensial operatoru ilə assosiasiya olunmuş sinqulyar inteqral operatorları, Riss və Bessel potensiallarını, maksimal funksiyaları, kəsr – maksimal funksiyaları və Puasson inteqrallarını özündə saxlayan subadditiv operatorların kafi qədər geniş sinfi daxil edilmiş və lokal inteqrallanan funksiyaların Ω_p və Ω_p^* inteqral xarakteristikaları daxil edilmiş və onların terminlərində, daxil edilmiş sinifdən olan, operatorun obrazının və proobrazının həmin xarakteristikalarını əlaqələndirən qiymətləndirmələr qurulmasıdır.

3. Ω_p və Ω_p^* xarakteristikaları ilə bağlı, xüsusi halda uyğun olaraq həm monoton artan və həm də monoton azalan çəki ilə çəkili $L_{p,\gamma}$ fəzalarına gətirən və eləcədəMorri tipli fəzalara gətirənqurmalar aparılır və belə fəzaların şkalasında daxil edilmiş sinifdən olan operator üçün məhdudluq haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

ELCHIN ALI oglu MAMEDOV

INTEGRAL OPERATORS OF HARMONIC ANALYSIS IN THE SPACES DETERMINED IN THE TERMS OF LOCAL CHARACTERISTICS OF FUNCTIONS

ABSTRACT

The work is devoted to study of main integral operators of Fourier-Bessel harmonic analysis. The following main results were obtained:

- A rather wide class of subadditive operators containing generalized fractional-maximal function, the Riezs and Bessel potentials, majorized by the operators from the definite class of Riezs potentials type integral convolutions, with almost monotone kernels generated by both ordinary and generalized shift, associated with the Laplace-Bessel differential operator, was introduced and for the operators of this class, theorems on strong and weak inequalities of Hardy-Littlwood-Sobolev and Sobolev-Ilin type as for operators from the $L_{p,\gamma}$ space to some Orlicz space were proved and their accuracy was shown.
- A rather wide class of subadditive operators containing in particular main integral operators of Fourier-Bessel harmonic analysis, as singular integral operators, the Riesz and Bessel potentials, maximum function, fractional-maximum functions, Poission integrals and also estimations connecting the same were introduced.
- The constructions connected with characteristics Ω and Ω^*, that in particular reduce to weight spaces $L_{p,\gamma}$ both with monotonically increasing and monotomically decreasing weight, respectively, and also to Morrey type speces and theorems on boundedness in the scale of such spaces were proved for the operators from the introduced class.