“KORONA PROBLEMİ” HAQQINDA

HEYBƏTQULU MUSTAFAYEV

Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyası, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu

e-mail: hsmustafayev@yahoo.com

ÖN SÖZ

“Korona” deyəndə bu gün hər kəsin ağlına aylardır bütün dünyanı təsiri altına alan pandemi və buna səbəb olan Covid-19 virusu gəlir. Bu uzun zamandır ki, minlərcə insanın ölümünə səbəb olan, insanları evlərinə həbs edən və həyatımızı kökündən dəyişdirən bir epidemiyadır. Bəli, bu kəlimə bizə çox bədbin şeylər xatırlatsa da, müxtəlif sahələrdə heç bilmədiyimiz başqa fikirlər də ifadə edə bilər.

Riyaziyyatçılar üçün “korona” kəliməsi bizim bildiyimizdən son dərəcə fərqli bir mənada istifadə olunur. Riyaziyyatda “Korona Problemi” və “Korona Teoremi” adı verilən anlayışlar mövcuddur. “Korona Problemi” dünyanın məşhur riyaziyyatçıları tərəfindən üzərində tədqiqatlar aparılan son dərəcə mühüm və çətin bir problemdir. O zaman gəlin “koronaya” bir də riyaziyyatçıların gözü ilə baxaq.

İLKİN MƏLUMATLAR

Bilirik ki, sıfırdan fərqli həqiqi a ədədi üçün $ab = 1$ bərabərliyini ödəyən həqiqi b ədədi vardır və bu ədəd $b = a^{-1}$ dir. Hər biri sıfırdan fərqli n dənə $a_1, a_2, \dots, a_n$ həqiqi ədədləri üçün

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1 \tag{1}$$

bərabərliyini ödəyən həqiqi $b_1, b_2, \dots, b_n$ ədədləri varmı? Əlbəttə ki, vardır və bunlar

$$b_1 = \frac{1}{na_1},\ b_2 = \frac{1}{na_2}, \dots, b_n = \frac{1}{na_n}$$

ədədləridir.

İndi də $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin tam ədədlər olduğunu və (1) bərabərliyini ödəyən $b_1, b_2, \dots, b_n$ tam ədədlərinin mövcud olduğunu fərz edək. Onda, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin qarşılıqlı sadə ədədlər olduğunu asanlıqla görə bilərik.

Təklif 1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ tam ədədləri qarşılıqlı sadə ədədlərdirsə onda,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$$

bərabərliyini ödəyən $b_1, b_2, \dots, b_n$ tam ədədləri vardır.

İsbatı. $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin $\mathbf{Z}$ tam ədədlər halqasında doğurduğu idealı J ilə işarə edək:

$$J \coloneqq \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n : b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{Z}\}$$

(xatırladaq ki, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinə bu idealın *doğuranları* deyilir). $\mathbf{Z}$ halqasının bütün ideallarının bir doğuranlı olduğunu nəzərə alsaq, $J = k\mathbf{Z}$ $(k \in \mathbf{Z})$ bərabərliyini yaza bilərik. Digər tərəfdən, $a_1, a_2, \dots, a_n$-lər qarşılıqlı sadə ədədlər olduğu üçün $J = \mathbf{Z}$ bərabərliyini alırıq. $1 \in \mathbf{Z}$ olduğunu da nəzərə alsaq,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$$

bərabərliyini ödəyən $b_1, b_2, \dots, b_n$ tam ədədlərinin mövcud olduğunu deyə bilərik.

■

Təbii olaraq belə bir sual ortaya çıxır: Təklif 1-də, $a_1, a_2, \dots, a_n$ ədədlərinin yerinə başqa obyektlər, məsələn funksiyalar, matrislər, operatorlar və s. alsaq görəsən hansı problemlərlə qarşılaşa bilərik. Biz burada bu sualın "funksiyalar" hissəsi ilə maraqlanacağıq.

Sualımızın ümumi xarakteri belədir: Kompleks müstəvinin G oblastında təyin olunmuş, müəyyən sinifdən olan və bu oblastda ümumi sıfırları olmayan $f_1, f_2, \dots, f_n$ funksiyaları üçün eyni sinifdən olan və

$$f_1(z)h_1(z) + f_2(z)h_2(z) + \cdots + f_n(z)h_n(z) = \mathbf{1} \ (\forall z \in D) \qquad (2)$$

bərabərliyini ödəyən $h_1, h_2, \dots, h_n$ funksiyaları varmı? Buradakı $\mathbf{1}$-funksiyası G oblastında təyin olunmuş vahid funksiyadır; $\mathbf{1}(z) = 1, \forall z \in G$.

Bir az sonra görəcəyik ki, bu sual riyaziyyatın ən mürəkkəb problemlərindən biri olan "Korona Problemi" ilə sıx bağlıdır.

Qeyd 1. Biz bundan sonra (2) bərabərliyini qısa olaraq

$$f_1 h_1 + f_2 h_2 + \cdots + f_n h_n = \mathbf{1}$$

şəklində yazacağıq.

Xatırladaq ki, yuxarıda bəhs etdiyimiz problemin bəzi funksiyalar sinfi üçün həlli Banax cəbrləri nəzəriyyəsini istifadə edir. Ona görə də "Korona Probleminə" keçmədən əvvəl Banax cəbrləri nəzəriyyəsindən bəzi məlumatlara ehtiyacımız olacaq.

Tərif 1. Kompleks ədədlər üzərində təyin olunmuş A-cəbrində verilmiş $\|\cdot\|$ norması, ixtiyari $a, b \in A$ elementləri üçün

$$\|ab\| \le \|a\|\|b\|$$

bərabərsizliyini ödəyirsə, A-ya *normalı cəbr* deyilir (A-da təyin edilmiş vurma əməlinin $\|\cdot\|$-normasına nəzərən kəsilməzliyi bu bərabərsizliyi təmin edir). Əgər $(A, \|\cdot\|)$-normalı cəbri $\|\cdot\|$-normasına nəzərən Banax fəzası olsa, A-ya *Banax cəbri* deyilir.

İxtiyari $a, b \in A$ elementləri üçün $ab = ba$ bərabərliyi ödənirsə, A-ya *kommutativ* cəbr deyilir. Əgər A-da ixtiyari $a \in A$ üçün $\mathbf{1}a = a\mathbf{1}$ bərabərliyini ödəyən $\mathbf{1}$ elementi varsa bu elementə cəbrin *vahid elementi* deyilir. Bu element yeganədir və norması 1-ə bərabərdir. Biz bu yazıda "A-Banax cəbridir" deyəndə A-nın kommutativ və vahid elementli Banax cəbri olduğunu başa düşəcəyik.

Tərif 2. A-Banax cəbrinin J $(\neq A)$-alt çoxluğu aşağıdakı şərtləri ödəyirsə, J-yə A-nın *idealı* deyilir:

1. İxtiyari $a, b \in J$ üçün, $a + b \in J$-dir;
2. İxiyari $a \in J$ və $b \in A$ üçün, $ab \in J$-dir.

J-idealı A-Banax cəbrinin idealıdırsa, J-nın qapanması (closure) olan $\bar{J}$-də A-nın idealıdır. Həqiqətən də, A-da təyin olunmuş vurma əməlinin kəsilməzliyindən, ixtiyari $a \in A$ və $b \in J$ üçün $ab \in \bar{J}$ olduğunu asanlıqla görə bilərik. $J \neq A$ olduğunu görmək üçün yenə asanlıqla görə bilərik ki, $a \in A$ və $\|\mathbf{1} - a\| < 1$ olsa,

$$b := \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{1} - a)^n$$

elementi a-nın tərsidir. Əgər $J = A$ olsaydı, onda $\|\mathbf{1} - a\| < 1$ bərabərsizliyini ödəyən bir $a \in J$ elementi tapılardı. Buradan da $\mathbf{1} = ab \in J$ və nəhayət $J = A$ olardı.

$J = \bar{J}$ bərabərliyini ödəyən J-idealına *qapalı ideal* deyilir.

Tərif 3. A-Banax cəbrinin sıfırdan fərqli J-idealını ehtiva edən hər hansı I-idealı, $I = J$ bərabərliyini ödəyərsə, J-yə A-nın *maksimal idealı* deyilir.

J-idealı A-nın maksimal idealıdırsa, $J \subseteq \bar{J} \neq A$ olduğu üçün $J = \bar{J}$ bərabərliyini alırıq. Beləliklə, ixtiyari maksimal ideal qapalıdır.

Ümumiyyətlə, Banax cəbrlərinin ideallarını və bəzən hətta maksimal ideallarını tapmaq, riyaziyyatın ən mürəkkəb problemləri arasında yer alır.

Misal 1. $\boldsymbol{C}$ ilə kompleks ədədlər çoxluğunu və $\boldsymbol{T} \coloneqq \{z \in \boldsymbol{C}: |z| = 1\}$ ilə də kompleks müstəvidə vahid radiuslu çevrəni işarə edək. $C(\boldsymbol{T})$ ilə $\boldsymbol{T}$-də təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasını göstərək. Bu fəza

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(z)|: z \in \boldsymbol{T}\}$$

normasına və funksiyaların vurma əməlinə nəzərən Banax cəbridir. İxtiyari $S \subset \boldsymbol{T}$ qapalı çoxluğu üçün,

$$J_S := \{f \in C(\boldsymbol{T}): f(z) = 0, \forall z \in S\}$$

bu cəbrin qapalı idealıdır və əksinə, bu cəbrin ixtiyari J-qapalı idealı $J = J_S$ şəklindədir, burada S-çoxluğu $\boldsymbol{T}$-nin qapalı alt çoxluğudur. Buradan alırıq ki, ixtiyari $z \in \boldsymbol{T}$ nöqtəsi üçün,

$$J_z := \{f \in C(\boldsymbol{T}): f(z) = 0\}$$

bu cəbrin maksimal idealıdır və əksinə, bu cəbrin ixtiyari maksimal J-idealı üçün $J = J_z$ bərabərliyini ödəyən $z \in \boldsymbol{T}$ nöqtəsi vardır. Bu mənada $C(\boldsymbol{T})$ -cəbrinin maksimal ideallar çoxluğunu $\boldsymbol{T}$ ilə eyniləşdirə bilərik.

Qeyd 2. Misal 1-də, $\boldsymbol{T}$ yerinə ixtiyari kompakt çoxluq alsaq, bu misaldakı hökmlər öz gücündə qalar.

Aşağıdakı teorem Zorn lemmasının nəticələrindən biridir və yuxarıda bəhs etdiyimiz bir çox problemin həllində mühüm rol oynayır.

Teorem 1. A-Banax cəbrinin hər bir idealı onun ən az bir maksimal idealı tərəfindən ehtiva edilir.

A-Banax cəbrinin a-elementinin tərsi varsa, bu element A-nın heç bir J-idealından ola bilməz, əks halda $1 = aa^{-1} \in J$ və nəhayət $J = A$ olardı. a-nın tərsi yoxdursa, a elementi $J \coloneqq \{ab: b \in A\}$ idealındandır.

Bu dediklərimizdən və Teorem 1-dən aşağıdaki nəticəyə gəlirik:

Nəticə 1. A-Banax cəbrinin a-elementinin tərsinin olması üçün zəruri və kafi şərt a-nın heç bir maksimal idealdan olmamasıdır.

Indi də Teorem 1-in bir tətbiqini görək. Bunun üçün, $D \coloneqq \{z \in \boldsymbol{C}: |z| < 1\}$ ilə kompleks müstəvinin açıq vahid dairəsini, $A(D)$ ilə, D-də analitik və $\overline{D} \coloneqq \{z \in \boldsymbol{C}: |z| \le 1\}$-də kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edək. Bu fəza

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)|: z \in D\} \ (= \sup\{|f(z)|: z \in \boldsymbol{T}\})$$

normasına və funksiyaların adi vurma əməlinə nəzərən vahid elementli Banax cəbridir. Bu cəbrin vahid elementi D-də təyin edilmiş vahid funksiyadır; $\mathbf{1}(z) = 1, \ \forall z \in \overline{D}$. Bu cəbrə bəzən *disk-cəbr* də deyilir. $A(D)$-dən olan funksiyaları onların sərhəd qiymətləri ilə eyniləşdirsək, $A(D)$-cəbrini $C(\boldsymbol{T})$-nin alt cəbri kimi də düşünə bilərik.

İxtiyari $z \in \overline{D}$ nöqtəsi bu cəbrdə

$$J_z := \{f \in A(D) : f(z) = 0\}$$

şəklində maksimal ideal təyin edər və əksinə, bu cəbrin ixtiyari maksimal J-idealı $J = J_z$ $(z \in \overline{D})$ şəklindədir. Başqa sözlə desək, $A(D)$-cəbrinin maksimal ideallar çoxluğunu $\overline{D}$ ilə eyniləşdirə bilərik.

$A(D)$-cəbrinin bütün qapalı ideallarını Amerikalı riyaziyyatçı Walter Rudin [2] müəyyən etmişdir.

Təklif 2. İxtiyari $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset A(D)$-funksiyalarının $\overline{D}$-də ümumi sıfırları yoxdursa onda,

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = \mathbf{1}$$

bərabərliyini ödəyən $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset A(\boldsymbol{D})$-funksiyaları vardır.

İsbatı. Asanlıqla görə bilərik ki,

$$J \coloneqq \{f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n: h_1, h_2, \dots, h_n \in A(D)\}$$

çoxluğu $A(D)$-cəbrinin idealıdır. Əvvəlcə $A(D)$-nin heç bir maksimal idealının J-idealını ehtiva etmədiyini göstərək. J_w $(w \in \overline{D})$-maksimal idealının J-idealını ehtiva etdiyini fərz edək. Başqa sözlə desək, J-dən olan bütün funksiyaların w-nöqtəsində sıfır olduğunu fərz edək. Xüsusi halda,

$$h_1(z) = z - w + 1, h_2(z) = z - w, \dots, \ h_n(z) = z - w$$

funksiyalarını alsaq,

$$0 = f_1(w)h_1(w) + f_2(w)h_2(w) + \cdots + f_n(w)h_n(w) = f_1(w)$$

bərabərliyini alarıq. Analoji üsulla, $f_2(w) = \cdots = f_n(w) = 0$ olduğunu da göstərə bilərik. Deməl ki, w-nöqtəsi $f_1, f_2, \dots, f_n$-funksiyalarının ümumi sıfrıdır. Bu isə ziddiyətdir. Teorem 1-

dən alırıq ki, J-idealı $A(D)$-cəbri ilə üst üstə düşür. Vahid funksiya $A(D)$-cəbrindən olduğu üçün

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = \mathbf{1}$$

bərabərliyini ödəyən $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset A(D)$-funksiyalarının mövcud olduğunu deyə bilərik.

■

Qeyd 3. Təklif 2-də, " $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset A(D)$-funksiyalarının $\overline{D}$-də ümumi sıfırları yoxdur” cümləsini riyazi olaraq aşağıdaki kimi də ifadə etmək olar:

$$\text{“ } \exists\delta > 0, \forall z \in D,\ \max_{1\le i\le n}|f_i(z)| \ge \delta \text{ ”}$$

Aşağıdakı təklifin isbatı Təklif 2-nin isbatına analojidir.

Təklif 3. İxtiyari $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset C(\boldsymbol{T})$-funksiyalarının $\boldsymbol{T}$-də ümumi sıfırları yoxdursa onda,

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = \mathbf{1}$$

bərabərliyini ödəyən $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset C(\boldsymbol{T})$-funksiyaları vardır.

Fərz edək ki, X-kompleks normalı fəza (Banax fəzası olma məcburiyyəti yoxdur), X^* isə X-ın qoşma fəzasıdır (X-da təsir edən xətti məhdud funksionallar fəzası). X^*-un

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)|: \|x\| \le 1\}$$

normasına nəzərən Banax fəzası olduğu yaxşı məlumdur. İndi də X^*-da adına *zəif*-topologiya* deyilən bir topologiya verək. Bunun üçün hər hansı $\varphi_0 \in X^*$ funksionalının ətraflarının bu topologiyada bazisini vermək kifayətdir. Bu ətrafların bazisi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ vektorları və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi ilə

$$U(\varphi_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \varepsilon) := \{\varphi \in X^*: \max_{1\le i\le n}|\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon\}$$

şəklində verilir. X^*-un zəif*-topologiyası $\sigma(X^*, X)$ ilə göstərilir. İxtiyari $\{\varphi_\alpha\} \subset X^*$ şəbəkəsi $\varphi \in X^*$ funksionalına $\sigma(X^*, X)$-topologiyasına nəzərən ancaq və ancaq o zaman yığılar ki, ixtiyari $x \in X$ üçün, $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$ olsun (nöqtəvi yığılma).

Teorem 2 (Banax-Alaoğlu). İxtiyari normalı X-fəzasının qoşmasının qapalı vahid dairəsi $\sigma(X^*, X)$-topologiyasına nəzərən kompaktdır.

A-Banax cəbrinin sıfırdan fərqli $\phi: A \to \boldsymbol{C}$ xətti funksiyası ixtiyari $a, b \in A$ üçün

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$$

bərabərliyini ödəyərsə, ϕ-yə, A-nın *kompleks homomorfizmi* deyilir. ϕ kompleks homomorfizminin norması 1-ə bərabərdir və hətta $\phi(\mathbf{1}) = 1$-dir. A-Banax cəbrinin hər kompleks homomorfizminin nüvəsi A-nın maksimal idealıdır və əksinə, A-nın hər maksimal idealı onun bir kompleks homomorfizminin nüvəsidir. Bu mənada biz kompleks homomorfizmlərlə maksimal idealları eyniləşdirəcəyik.

A-Banax cəbrinin bütün maksimal ideallar (və ya kompleks homomorfizmlər) çoxluğunu M_A ilə göstərəcəyik. İndi də M_A-da topologiya verməyə çalışaq.

Tərif 4. A-Banax cəbridirsə, $\sigma(A^*, A)$-topologiyasının M_A-ya endirdiyi topologiyaya *Gelfand topologiyası* deyilir.

Tərifdən belə başa düşülür ki, $\phi_0 \in M_A$-funksionalının Gelfand topologiyasına nəzərən ətraflarının bazisi $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$-vektorları və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi ilə

$$V(\phi_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \varepsilon) := \{\phi \in M_A : \max_{1 \le i \le n} |\phi(a_i) - \phi_0(a_i)| < \varepsilon\}$$

şəklində verilir.

Tərif 5. A-Banax cəbrinin Gelfand topologiyası ilə təçhiz edilmiş maksimal ideallar çoxluğuna A-nın *maksimal ideallar fəzası* və ya *Gelfand fəzası* deyilir.f

Biz bundan sonra M_A ilə A-Banax cəbrinin Gelfand fəzasını göstərəcəyik.

Asanlıqla göstərə bilərik ki, A-Banax cəbrinin kompleks homomorfizmlərindən ibarət $\{\phi_\alpha\}$-şəbəkəsi $\phi \in A^*$-funksionalına $\sigma(A^*, A)$-topologiyasına nəzərən yığılırsa, ϕ-də A-nın kompleks homomorfizmi olur. Deməli ki, M_A-çoxluğu A^*-un qapalı vahid dairəsinin $\sigma(A^*, A)$-topologiyasına nəzərən qapalı alt çoxluğudur. Beləliklə, Banax-Alaoğlu teoremindən aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

Nəticə 2. İxtiyari A-Banax cəbrinin maksimal ideallar fəzası olan M_A-kompakt çoxluqdur.

Tutaq ki, A-Banax cəbri, M_A isə A-nın Gelfand fəzasıdır. İxtiyari $a \in A$ elementinin M_A-da, $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$ şəklində təyin edilmiş $\hat{a}: M_A \to \boldsymbol{C}$-funksiyasına a-nın *Gelfand çevirməsi* deyilir. Tərifdən başa düşülür ki, $\hat{a}$ funksiyası M_A-da kəsilməz funksiyadır. Deməli ki, A-Banax cəbrinin "abstrakt" elementlərini onlarla müqayisədə daha konkret elementlərlə, Gelfand fəzasında kəsilməz funksiyalarla reallaşdıra bilərik. İndi də,

$$\|\hat{a}\|_\infty := \sup\{|\hat{a}(\phi)| : \phi \in M_A\}$$

olaraq təyin etsək, ixtiyari $a \in A$ üçün, $\|\hat{a}\|_\infty \le \|a\|$ bərabərsizliyini yaza bilərik. Gelfand çevirməsi Furye çevirməsinin ümumiləşməsi olduğu üçün, Gelfand çevirməsi riyaziyyatda çox mühüm rol oynayır.

KORONA PROBLEMİ

D-də analitik və məhdud funksiyalar fəzasını $H^\infty(D)$ ilə və ya kısa olaraq H^∞ ilə işarə edəcəyik. Bu fəza

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in D\}$$

normasına və funksiyaların adi vurma əməlinə nəzərən vahid elementli Banax cəbridir (disk-cəbrin vahidi H^∞-un da vahididir). $A(D)$-cəbrinin, H^∞-un alt cəbri olduğunu da görə bilərik. H^∞-cəbrinə bəzən *Hardi cəbri* də deyilir.

Fatou teoreminə görə, ixtiyari $f \in H^\infty$ üçün, $t \in [0,2\pi)$-yə nəzərən sanki hər yerdə $\lim_{r \to 1^-} f(re^{it})$ vardır. Bu limit funksiyasını $\tilde{f}(e^{it})$ ilə göstərəcəyik. Əgər sanki hər $t \in [0,2\pi)$ üçün $|\tilde{f}(e^{it})| = 1$ olsa, f-funksiyasına *daxili (inner) funksiya* deyilir. Məsələn, $f(z) = \exp\frac{z+1}{z-1}$ funksiyası daxili funksiyadır (ixtiyari $t \neq 0$ üçün $|f(e^{it})| = 1$ olduğunu asanlıqla göstərə bilərik).

$\boldsymbol{T}$-də Lebeq mənada inteqrallanan funksiyalar fəzasını $L^1(\boldsymbol{T})$ ilə göstərək. İxtiyari $f_0 \in H^\infty$ funksiyasının L^1-*zəif topologiyaya* nəzərən ətraflarının bazisi $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset L^1(\boldsymbol{T})$-funksiyaları və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi ilə

$$O(f_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \varepsilon) = \left\{ f \in H^\infty : \max_{1 \le i \le n} \left| \int_0^{2\pi} \tilde{f} h_i dt - \int_0^{2\pi} \tilde{f_0} h_i dt \right| < \varepsilon \right\}$$

şəklində verilir. $\{f_n\} \subset H^\infty$-ardıcıllığı $f \in H^\infty$-funksiyasına L^1-zəif topologiyaya nəzərən ancaq və ancaq o zaman yığılar ki, ixtiyari $h \in L^1(\boldsymbol{T})$ üçün, $\int_0^{2\pi} \tilde{f}_n h dt \to \int_0^{2\pi} \tilde{f} h dt$ olsun.

Təbii olaraq aşağıdakı sual ortaya çıxır: Görəsən H^∞-cəbrinin idealları nələrdir? Bəzi xüsusi halların xaricində bu sualın cavabını tam olaraq bilmirik. Məsələn, H^∞-cəbrinin L^1-zəif topologiyaya nəzərən bütün qapalı idealları φH^∞-şəklindədir ki, burada φ-daxili funksiyadır.

Görəsən H^∞-cəbrinin bütün maksimal ideallarını müəyyən edə bilərikmi? Aşağıda bu suala cavab verməyə çalışacağıq.

H^∞-cəbrinin maksimal ideallar fəzasını M^∞ ilə işarə edəcəyik. Nəticə 2-yə görə M^∞-kompakt çoxluqdur. $\boldsymbol{z}: D \to D$ ilə koordinat funksiyasını göstərək. Əvvəlcə onu görək ki, ixtiyari $w \in D$ üçün, $\phi(\boldsymbol{z}) = w$ və ya

$$\phi(\boldsymbol{z} - w\mathbf{1}) = 0$$

bərabərliyini ödəyən yeganə $\phi \in M^\infty$-funksionalı vardır. Həqiqətən də, belə bir ϕ-funksionalı olmasaydı, onda ixtiyari $\phi \in M^\infty$ üçün, $\phi(\boldsymbol{z} - w\mathbf{1}) \neq 0$ olardı ki, bu da Nəticə 1-ə görə $\boldsymbol{z} - w\mathbf{1}$-funksiyasının H^∞-cəbrində tərsi olardı. Bu isə mümkün deyil. Daha sonra, ixtiyari $f \in H^\infty$ üçün,

$$h(z) := \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

funksiyasının H^∞-dan olduğunu nəzərə alaraq,

$$f(z) = f(w) + (z - w)h(z)$$

bərabərliyinin hər iki tərəfinə ϕ-ni tətbiq etsək,

$$\phi\big(f(z)\big) = f(w)$$

bərabərliyini alarıq. Əgər başqa bir $\psi \in M^\infty$ funksionalı $\psi(\boldsymbol{z}) = w$ bərabərliyini ödəmiş olsaydı, analoji yolla $\psi\big(f(z)\big) = f(w)$ bərabərliyini də almış olardıq. Buradan da hər $f \in H^\infty$ üçün,

$$\phi\big(f(z)\big) = \psi\big(f(z)\big)$$

bərabərliyini və beləcə $\phi = \psi$ alarıq. Demək ki, ϕ -funksionalı yeganədir. Bu funksionalı ϕ_w ilə işarə etsək, tərifə görə $\phi_w(\boldsymbol{z}) = w$ bərabərliyini yaza bilərik. Beləliklə, $w \to \phi_w$-inikası, D-ni M^∞-a homeomorf daxil edər. Buna görə də biz D-ni M^∞-un alt çoxluğu kimi düşünə bilərik. Yeri gəlmişkən, ϕ_w-yə uyqun gələn maksimal idealın

$$J_w := \{f \in H^\infty \ : f(w) = 0\}$$

olduğunu da xatırlayaq.

İndi də D-nin və ya $\{\phi_w: w \in D\}$-nin M^∞-un açıq alt çoxluğu olduğunu göstərək. Bunun üçün, $\hat{\boldsymbol{z}}$ ilə $\boldsymbol{z}$-koordinat funksiyasının Gelfand çevirməsini işarə edək. $\hat{\boldsymbol{z}} : M^\infty \to \boldsymbol{C}$-funksiyası kəsilməz olduğu üçün,

$$\hat{\boldsymbol{z}}^{-1}(D) = \{\phi \in M^\infty : |\phi(\boldsymbol{z})| < 1\}$$

bərabərliyindən $\{\phi \in M^\infty : |\phi(\boldsymbol{z})| < 1\}$-nin M^∞-un açıq alt çoxluğu olduğunu deyə bilərik. Digər tərəfdən,

$$\{\phi \in M^\infty : |\phi(\boldsymbol{z})| < 1\} = \{\phi_w : w \in D\}$$

bərabərliyini asanlıqla yaza bilərik. Deməк ki, $\{\phi_w: w \in D\}$ və bilavasitə D-çoxluğu M^∞-un açıq alt çoxluğudur. Beləliklə biz $M^\infty \setminus D$-nin boşdan fərqli (kompakt) çoxluq olduğunu gösdərdik. Buradan, J_w $(w \in D)$-maksimal ideallarından başqa da H^∞-un maksimal ideallarının mövcud olduğunu deyə bilərik.

İndi də aşağıdakı sual ortaya çıxır: Görəsən $M^\infty \setminus D$ çoxluğunun elementləri nələrdir? Ağlımıza ilk gələn, $M^\infty \setminus D$-nin elementlərinin D-nin sərhəd nöqtələrinə uyğun gələcəyi olur. Ancaq yuxarıda da gördük ki, D-nin sərhəddindəki bəzi nöqtələrdə H^∞-un funksiyaları təyin edilməmişdir. Təəssüf ki, $M^\infty \setminus D$-nin elementlerinin tam olaraq nələrden ibarət olduğunu da bilmirik. Ancaq bunu edə bilərik: Eyni ilə yuxarıda etdiyimiz kimi, ixtiyari $\xi \in \boldsymbol{T}$ üçün $\phi(\boldsymbol{z}) = \xi$-bərabərliyini ödəyən $\phi \in M^\infty$-funksionalının var olduğunu deyə bilərik, ancaq ϕ-nin yeganə olub olmadığı haqqında heç nə deyə bilmirik. Ona görə də

$$M_\xi = \{\phi \in M^\infty : \phi(\boldsymbol{z}) = \xi\}$$

çoxluqlarını daxil edirik. Bu çoxluqlara M^∞-un *qatları* deyilir. Nəticədə aşağıdakı düsturu yaza bilərik:

$$M^\infty = D \cup \left(\cup_{\xi \in T} M_\xi\right).$$

Yuxarıda gördük ki, $M^\infty \setminus D$-çoxluğu boş deyil. İndi də $\overline{D}^\infty$ ilə, D-nin M^∞-da qapanmasını (əlbəttə ki, Gelfand topologiyasına nəzərən) göstərək. Bu dəfə də belə bir sual ortaya çıxır: $M^\infty \setminus \overline{D}^\infty$ -çoxluğu boşdur yoxsa yox?

Tərif 6 (D.J. Newman [3]). $M^\infty \setminus \overline{D}^\infty$ -çoxluğuna *korona (tac)* deyilir.

Korona Problemini 1941-ci ildə Yapon riyaziyyatçısı Shizuo Kakutani [1] aşağıdakı şəkildə ifadə etmişdir:

Korona Problemi. Korona deyilən $M^\infty \setminus \overline{D}^\infty$ -çoxluğu boşdur yoxsa yox, və ya D-çoxluğu H^∞-cəbrinin maksimal ideallar fəzasında Gelfand topologiyasına nəzərən sıxdır yoxsa yox?

Aşağıdakı teorem, Korona Probleminin yuxarıdakı ifadəsi ilə müqayisədə funksiyalar nəzəriyyəsinin nisbətən daha asan başa düşülən başqa bir probleminə ekvivalent olduğunu göstərir.

Teorem 3. Aşağıdakı şərtlər ekvivalentdir:

a) Korona boşdur, yəni $M^\infty \setminus \overline{D}^\infty$ -çoxluğu boşdur və ya D-çoxluğu M^∞-da sıxdır.

b) İxtiyari $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset H^\infty$ -funksiyaları və ixtiyari $z \in D$ üçün,

$$\max_{1\le i\le n}|f_i(z)| \ge \delta \tag{3}$$

şərtini ödəyən $\delta > 0$ ədədi varsa, onda

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = \mathbf{1}$$

bərabərliyini ödəyən $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset H^\infty$-funksiyaları vardır.

İsbatı. a)⇒b) Əvvəlcə koronanın boş çoxluq olduğunu və ya D-çoxluğunun M^∞-da sıx olduğunu fərz edək. H^∞-cəbrindən (3) şərtini ödəyən $f_1, f_2, \dots, f_n$-funksiyalarını alaq və J ilə bu funksiyaların doğurduğu idealı işarə edək:

$$J \coloneqq \{f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n : h_1, h_2, \dots, h_n \in H^\infty\}.$$

Kəsilməzlikdən və (3) şərtindən, ixtiyari $\phi \in M^\infty$ üçün,

$$\max_{1\le i\le n}|\phi(f_i)| \ge \delta$$

bərabərsizliyini yaza bilərik. Bu bərabərsizlik onu göstərir ki, J-idealı H^∞-cəbrinin heç bir maksimal idealına daxil deyil. Teorem 1-dən, $J = H^\infty$ bərabərliyini alarıq. DeməK ki, vahid funksiya J-idealındandır. Buradan da

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = \mathbf{1}$$

bərabərliyini ödəyən $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset H^\infty$-funksiyalarının mövcud olduğunu deyə bilərik.

b)⇒a) İndi də teoremin b) bəndinin doğru olduğunu, ancaq D-nin M^∞-da sıx olmadığını fərz edək. Gelfand topologiyasının tərifinə görə, elə $\phi \in M^\infty$, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset H^\infty$ və $\delta > 0$ ədədi vardir ki, ixtiyari $z \in D$ üçün,

$$|g_k(z) - \phi(g_k)| \ge \delta$$

bərabərsizliyi doğru olur. Sonra da

$$f_k(z) := g_k(z) - \phi(g_k)\ (k = 1, \dots, n)$$

funksiyalarını təyin edək. Asanlıqla görə bilərik ki, bu funksiyalar H^∞-cəbrindəndir və hər k üçün $\phi(f_k) = 0$-dır. Digər tərəfdən, ixtiyari $z \in D$ üçün, $|f_k(z)| \ge \delta$ bərabərsizliyini də yaza bilirik. Fərziyyəmizə görə

$$f_1h_1 + f_2h_2 + \cdots + f_nh_n = \mathbf{1}$$

bərabərliyini ödəyən $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset H^\infty$-funksiyaları vardır. Bu bərabərliyin hər iki tərəfinə ϕ-funksionalını tətbiq etsək, $\phi(f_k) = 0$ və $\phi(\mathbf{1}) = 1$ olduğu üçün $0 = 1$ alırıq ki, bu da ziddiyətdir.

■

KORONA TEOREMİ

Korona problemini İsveçli riyaziyyatçı Lennart Karleson [4] 1962-ci ildə həll etmişdir və “Karleson Korona Teoremi” adı ilə məşhurdur.

Korona Teoremi. Korona boş çoxluqdur, yəni $M^{\infty} \setminus \overline{D}^{\infty}$ -çoxluğu boşdur və ya D-çoxluğu H^{∞}-cəbrinin maksimal ideallar fəzasında Gelfand topologiyasına nəzərən sıxdır.

Bu teoremin Karleson tərəfindən verilmiş isbatı çox çətin başa düşüləndir. Hətta 1979 ilinə kimi bu sahədə yazılmış məqalə və kitablarda Karlesonun isbatına rast gəlmirik. 1979-da Thomas Wolff bu teoremin daha "sadə" isbatını verir, ancaq bu isbatı heç yerdə çap etmir. Paul Koosis [7] və John Garnett [8] kitablarında Wolffun bu isbatına geniş yer verir. Kenneth Hoffman [5] bu teoremdən istifadə edərək M^{∞}-un qatları ilə əlaqədar çox mühüm nəticələr alır. Hələ də bu teoremin müxtəlif istiqamətlərdə ümumiləşmələri üzərində tədqiqatlar aparan çox sayda riyaziyyatçı vardır.

SON SÖZ

Beləliklə, yuxarıda gördük ki, riyaziyyatdakı "korona" boş çoxluqdur. Həyatımızdakı "koronanın" da bir gün boş çoxluq olması arzusu ilə...

İSTİFADƏ OLUNMUŞ ƏDƏBİYYAT

1. Sh. Kakutani, Concrete representation of abstract (M)-spaces (a characterization of the space of continuous functions), Annals of Mathematics, 1941, vol.42, No.4, p.994-1024.
2. W.Rudin, The closed ideals in an algebra of analytic functions, Canad. J. Math. 1957, vol.9, p.426-434.
3. D.J. Newman, Some remarks on the maximal ideal structure of H^{∞}, Annals of Mathematics, 1959, vol.70, No.2, p.438-445.
4. L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Annals of Mathematics, 1962, vol.76, No.3, p.547-559.
5. K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall Series in Modern Analysis, New York, 1962.
6. R. Larsen, Banach Algebras, Marcel Dekker, New York, 1973.
7. P. Koosis, Introduction to H_p-spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem. London Mathematical Society, Lecture Note Series, 40, Cambridge-New York, 1980.
8. J.B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York-London, 1981.
9. J.B. Conway, A Course in Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.