**AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI**

*Əlyazması hüququnda*

# HEYZENBERQ QRUPUNDA TƏYİN OLUNMUŞ KƏSR MAKSİMAL VƏ KƏSR İNTEQRAL OPERATORLARIN ÜMUMİLƏŞMİŞ ÇƏKİLİ MORRİ FƏZALARINDA MƏHDUDLUĞU

| | |
|---|---|
| İxtisas: | 1202.01 - Analiz və funksional analiz |
| Elm sahəsi: | Riyaziyyat |
| İddiaçı: | **Cavanşir Vaqif oğlu Əzizov** |

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

**AVTOREFERATI**

**Bakı - 2024**

Dissertasiya işi Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

**Elmi rəhbər:** AMEA-nın müxbir üzvü, fizika riyaziyyat elmləri doktoru, professor

**Vaqif Sabir oğlu Quliyev**

**Rəsmi opponentlər:** fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor

**Heybətqulu Səfər oğlu Mustafayev**

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

**Fuad Ağca oğlu Abdullayev**

fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

**Mehralı Qaçay oğlu Əliyev**

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurası.

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü, fizika riyaziyyat elmləri doktoru, professor

______________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: fizika riyaziyyat elmləri namizədi

______________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: fizika riyaziyyat elmləri doktoru, professor

______________ **Alik Malik oğlu Nəcəfov**

## İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

**Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.** Dissertasiya işində aparılan araşdırmalar Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal, kəsr inteqral operatorların və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğuna həsr edilmişdir.

Həmçinin, dissertasiyada Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal, kəsr inteqral operatorların, yüksək tərtib kəsr maksimal kommutatorun və kəsr inteqral operatorun yüksək tərtib kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu məsələləri araşdırılmışdır.

Heyzenberq qrupu kvant mexanikasında məşhur qeyri-müəyyənlik prinsipini verən Verner Heyzenberqin şərəfinə adlandırılıb. Heyzenberq qrupu riyaziyyatın və nəzəri fizikanın bir sıra sahələrində mühüm rol oynadığı üçün xüsusi maraq doğurur.

Son illərdə Heyzenberq qrupunda funksional fəzalar nəzəriyyəsi tədqiqatçıların böyük diqqətini cəlb etmişdir. Bu diqqət daha çox çoxobrazlılarda verilmiş dəyişən əmsallı differensial tənliklərin həllərinin araşdırılmasında ortaya çıxır.

Keçən əsrin 70-ci illərindən etibarən Heyzenberq qrupunda Harmonik analizin bu və ya digər məsələləri ciddi araşdırılmağa başlandı. Bu sahədə E.Stein, Q. Folland, C. Fefferman, R. Beals, S. Tanqavelu, L. Qrafakos, S.Vodopyanov, V. S. Quliyev, V. Kokilaşvili, A. Mesxi və digər riyaziyyatçıların əsərlərində ciddi tədqiqatlar aparılmışdır.

Xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həllərinin lokal xassələrinin öyrənilməsində Morri fəzaları mühüm rol oynayır. Morri fəzaları 1938-ci ildə ikinci tərtib elliptik differensial tənliklərin həllərinin lokal xassələrinin öyrənilməsi ilə bağlı olaraq Ç.B.Morri tərəfindən daxil edilmişdir. 1969-cu ildə C.Petre Morri fəzasında Riss potensialının Spanne tərəfindən isbat olunmuş məhdudluğu teoremi daxil etmişdir. 1988-ci ildə F. Çiarenza və M. Fraska isə Morri fəzasında Hardi-Litlvud maksimal operatorunun məhdudluğunu araşdırmışlar.

XX əsrin 90-cı illərində ümumiləşmiş Morri fəzalarının geniş tədqiqatına başlanıldı. 1991-ci ildə T.Mizuhara ümumiləşmiş Morri fəzasını daxil etmiş və bu fəzada bəzi klassik operatorların məhdudluğunu öyrənmişdir. 1994-ci ildə E.Nakai maksimal operator, Riesz potensialı və sinqulyar inteqral operatorların ümumiləşmiş Morri fəzasında məhdudluğunu isbat etmişdir. 1994-cü ildə V.S. Quliyev isə doktorluq dissertasiyasında bircins Li qrupunda lokal və tamamlayıcı lokal Morri tipli fəzalarını daxil etmiş və bu qruplarda təyin olunmuş kəsr inteqral operator və sinqulyar inteqral operatorların bu fəzalarda məhdudluqlarını araşdırmışdır.

Morri və ümumiləşmiş Morri fəzalarında mühüm nəticələr D. Adams, M. Teylor, S. Kampanato, J. Xiao, D. Yanq, Y. Qiqa, A.J. Mazzukato, G.D. Fazio, E. Nakai, V.P. İlin, V.S. Quliyev, L. Softova, V.İ. Burenkov, M. Ragusa, D. Palaqaçev, A. Qoqataşvili, Y. Savano, L. Tanq, D. Yanq, Jinqşi Xu, B.T. Bilalov, R.M. Rzayev, R.Ç. Mustafayev, C.C. Həsənov, R.Ə. Bəndəliyev, T.S. Hacıyev və başqalarının işlərində alınmışdır.

Çəkili Morri fəzaları 2009-cu ildə Y. Komori və S. Shirai tərəfindən daxil edilmişdir. Onlar analizin mühüm operatorları olan maksimal operatorun, Riss potensialının və sinqulyar inteqral operatorun çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu araşdırılmışdır. 2012-ci ildə V.S. Quliyev isə həm ümumiləşmiş Morri fəzaları, həm də çəkili Morri fəzalarını özündə birləşdirən ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarını daxil etmiş və ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında harmonik analizin klassik operatorları və onların kommutatorlarının məhdudluqlarını öyrənmişdir.

**Tədqiqatın obtekt və predmeti.** Dissertasiya işinin əsas obyekti və predmeti Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator, kəsr inteqral operator, kəsr maksimal kommutator və kəsr inteqral operatorun kommutatorudur.

**Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri.** Dissertasiya işinin əsas məqsədi və vəsifəsi Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator, kəsr inteqral operator, kəsr maksimal kommutator və kəsr inteqral operatorun kommutatorunun ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudlarının öyrənilməsidir.

**Tədqiqat metodları.** Dissertasiya işində funksional analizin, həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin, Heyzenberq qrupunda funksional fəzalar nəzəriyyəsinin, harmonik analizin, daxilolma teoremləri və xətti operatorlar nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edilmişdir.

**Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.**

1. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu araşdırılır.

2. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr inteqral operatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu araşdırılır.

3. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu araşdılır.

4. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr inteqral operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu araşdırılır.

**Tədqiqatın elmi yeniliyi.**

1. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər əldə edilmişdir.

2. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr inteqral operatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafı şərtlər əldə edilmişdir.

3. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər əldə edilmişdir.

4. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr inteqral operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər əldə edilmişdir.

**Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti.** İşdə əldə edilmiş nəticələr nəzəri xarakter daşıyır. Harmonik analizin son illərdə əldə etdiyi nailiyyətlərdən biri də Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal və kəsr inteqral operatorlar nəzəriyyəsinin əhəmiyyətli dərəcədə analizin müxtəlif sahələrinə tətbiq olunması ilə bağlıdır. Alınmış nəticələr xüsusi törəməli differensial tənliklər, funksional analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi, yaxınlaşma nəzəriyyəsinin problemləri, bircins qruplarda harmonik analiz və riyaziyyatın digər sahələrinə tətbiq olunur.

**Aprobasiyası və tətbiqi.** Dissertasiyada alınmış nəticələr Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" (AMEA-nın müxbir üzvü, prof.V.S.Quliyev), "Funksional analiz" (f.-r.e.d., prof. H.İ.Aslanov) və "Qeyri-harmonik analiz" (AMEA-nın müxbir üzvü, prof. B.T.Bilalov) şöbələrinin seminarlarında məruzə edilmişdir.

Dissertasiyanın nəticələri AMEA-nın müxbir üzvü, prof. Vaqif Quliyevin 60-illik yubileyinə həsr edilmiş "Morri tipli fəzalarda operatorlar və onların tətbiqləri" adlı beynəlxalq konfransda (Kırşehir 2017), akad. Akif Hacıyevin 80-illik yubileyinə həsr edilmiş "Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı 2017), AMEA-nın müxbir üzvü, prof. Qoşqar Əhmədovun 100-illik yubileyinə həsr edilmiş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı 2017), Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun 60 illik yubileyinə həsr edilmiş "Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı 2019), akad. İbrahim İbiş oğlu İbrahimovun 110 illik yubileyinə həsr edilmiş "Riyaziyyat və Mexanikanın müasir problemləri" mövzusunda beynəlxalq konfransda (Bakı 2022), "Sənaye Tətbiqləri ilə Nəzarət və Optimallaşdırma" adlı 8-ci beynəlxalq konfransda (Bakı 2022), Ümummilli lider Heydər Əliyevin 100 illik yubileyinə həsr edilmiş "Riyaziyyat və mexanikanın müasir problemləri" adlı beynəlxalq konfransda (Bakı 2023) məruzə edilmişdir.

**Müəllifin şəxsi töhfəsi.** Alınmış nəticələr və təkliflər müəllifə aiddir.

**Müəllifin nəşrləri.** Tədqiqat üzrə Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK-ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 5 məqalə (2-si Web of Science Core Collection bazasına, 3-ü SCOPUS bazasına daxildir) və 7 tezis (bütövlükdə 12 iş) nəşr olunmuşdur.

**Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.**

Dissertasiya işi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun "Riyazi analiz" şöbəsində yerinə yetirilmişdir.

**Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.** Dissertasiya işinin ümumi həcmi 223607 işarədən ibarətdir (titul səhifəsi – 404 işarə, mündəricat – 1744 işarə, giriş – 46654 işarə, birinci fəsil – 108000 işarə, ikinci fəsil – 66000 işarə, nəticə – 805 işarə) və 124 səhifədir. Dissertasiya işində istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı 102 ədəbiyyatdan ibarətdir.

## DİSSERTASİYANIN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin birinci fəslinin birinci və ikinci paraqraflarında uyğun olaraq Heyzenberq qrupları və ümumiləşmiş Morri fəzaları haqqında bəzi anlayışlar, tədqiqat işində lazım olacaq əsas məlumatlar qeyd edilmişdir.

$R^{2n+1}$ çoxluğunun nöqtələrini, $u=(x,y,t)$ ilə işarə edək. Burada $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $t\in R$.

$H_n$ Heyzenberq qrupu $u=(x,y,t)$ və $v=(x',y',t')$ elemetləri üçün

$$u\otimes v=uv=\left(x+x',y+y',t+t'+\frac{1}{2}(xy'-x'y)\right)$$

şəklində vurma əməlinin təyin edildiyi $R^{2n+1}$ çoxluğudur.

İxtiyari $u=(x,y,t)\in H_n$ elementinin Heyzenberq norması

$$|u|_H\equiv|u|=\left(\left(|x|^2+|y|^2\right)^2+t^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

şəklində təyin edilir.

Daxil edilmiş norma ilə mərkəzi $u=(x,y,t)$-də olan, $r$-radiuslu açıq Heyzenberq kürəsi $B(u,r)=\left\{v\in H_n:\left|u^{-1}v\right|<r\right\}$ şəklində təyin edilir. $B(u,r)$ kürəsinin Xaar ölçüsü $\left|B(u,r)_H\right|$ və ya qısaca $|B(u,r)|$ kimi işarə olunur.

$Q=2n+2$ ədədi Heyzenberq qrupunun bircinslik ölçüsüdür.

**Tərif 1.** Tutaq ki, $1 \le p < \infty$ və $\varphi$ funksiyası isə $H_n \times (0,\infty)$-da təyin olunmuş müsbət ölçülən funksiyadır. $M_{p,\varphi}(H_n)$ ümumiləşmiş Morri fəzası

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}(H_n)} = \sup_{u \in H_n, r>0} \frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(u,r)} \|f\|_{L_p(B(u,r))}$$

sonlu normasına malik bütün $f \in L_p^{loc}(H_n)$ funksiyaları çoxluğunun əmələ gətirdiyi fəzadır.

Həmçinin, $WM_{p,\varphi}(H_n)$ ümumiləşmiş zəif Morri fəzası

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}(H_n)} = \sup_{u \in H_n, r>0} \frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(u,r)} \|f\|_{WL_p(B(u,r))}$$

sonlu normasına malik bütün $f \in WL_p^{loc}(H_n)$ funksiyaları çoxluğunun fəzası kimi təyin olunur.

**Qeyd 1.** $H_n \times (0,\infty)$-da təyin olunmuş və ixtiyari $t > 0$ üçün

$$\sup_{u \in H_n} \left\| \frac{r^{-\frac{Q}{p}}}{\varphi(u,r)} \right\|_{L_\infty(t,\infty)} < \infty \quad \text{və} \quad \sup_{u \in H_n} \left\| \frac{1}{\varphi(u,r)} \right\|_{L_\infty(0,t)} < \infty$$

şərtlərini ödəyən müsbət ölçülən $\varphi$ funksiyaları çoxluğunu $\Omega_p$ ilə işarə edirik.

**Tərif 2.** Tutaq ki, $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ funksiyası verilmişdir. Əgər elə $C > 0$ sabiti varsa ki, ixtiyari $r \le s$ ədədləri üçün $\varphi(r) \le C\varphi(s)$ ($\varphi(r) \ge C\varphi(s)$) olarsa, onda $\varphi$ funksiyası sanki artan (azalan) adlanır.

Tutaq ki, $1 \le p < \infty$. Sanki azalan elə $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ funksiyasına baxaq ki, $r \in (0,\infty) \to r^{\frac{Q}{p}} \varphi(r) \in (0,\infty)$ funksiyası sanki artan olsun. Belə funksiyalar çoxluğunu $\mathcal{G}_p$ ilə işarə edirik.

Ümumiləşmiş və zəif ümumiləşmiş Morri fəzalarının trivial olmadığını göstərən və məhdudluq teoremlərinin isbatında əhəmiyyətli rol oynayan aşağıdakı lemma doğrudur.

**Lemma 1.** *Tutaq ki,* $\varphi \in \mathcal{G}_p$, $1 \le p < \infty$, $B_0 = (u_0, r_0)$ *və* $\chi_{B_0}$ *isə* $B_0$ *kürəsində təyin olunmuş xarakteristik funksiyadır, onda* $\chi_{B_0} \in M_{p,\varphi}(H_n)$. *Bundan əlavə, elə* $c > 0$ *və* $C > 0$ *sabitləri var ki,*

$$\frac{c}{\varphi(r_0)} \le \left\| \chi_{B_0} \right\|_{WM_{p,\varphi}(H_n)} \le \left\| \chi_{B_0} \right\|_{M_{p,\varphi}(H_n)} \le \frac{C}{\varphi(r_0)}.$$

**Qeyd 2.** Dissertasiyada $A \lesssim B$ ilə $A \le CB$ bərabərsizliyini işarə edəcəyik. Belə ki, $C$ verilən kəmiyyətlərdən asılı olmayan müəyyən müsbət ədəddir. Əgər $A \lesssim B$ və $A \gtrsim B$ olarsa, onda $A$ və $B$ kəmiyyətlərini ekvivalent adlandırırıq və $A \approx B$ kimi işarə edirik.

Paraqraf 1.3-də $M_\alpha$ kəsr maksimal operatorun $M_{p,\varphi}(H_n)$ ümumiləşmiş Morri fəzalarında zəif və güclü məhdudluqlarını araşdırırıq. Bundan əlavə, $M_{b,\alpha}$ kəsr maksimal kommutatorun və $M_\alpha$ kəsr maksimal operatorun doğurduğu $[b, M_\alpha]$ kommutatorun $M_{p,\varphi}(H_n)$ ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluqlarını öyrənirik.

Tutaq ki, $f, b \in L_1^{loc}(H_n)$. $M_\alpha$ kəsr maksimal operator, $M_{b,\alpha}$ kəsr maksimal kommutator və $b$ funksiyasının və $M_\alpha$ kəsr maksimal operatorun doğurduğu $[b, M_\alpha]$ kommutator uyğun olaraq aşağıdakı kimi təyin olunurlar.

$$M_\alpha f(u) = \sup_{r>0} |B(u,r)|^{-1+\frac{\alpha}{Q}} \int_{B(u,r)} |f(v)| dv,$$

$$M_{b,\alpha} f(u) = \sup_{r>0} |B(u,r)|^{-1+\frac{\alpha}{Q}} \int_{B(u,r)} |b(u) - b(v)| |f(v)| dv,$$

$$[b, M_\alpha] f(u) = b(u) M_\alpha f(u) - M_\alpha (bf)(u),$$

burada $0 \le \alpha < Q$.

$b \in L_1^{loc}(H_n)$ üçün

$$b^-(u) = \begin{cases} 0, & b(u) \geq 0 \\ |b(u)|, & b(u) < 0 \end{cases}$$

və $b^+(u) = |b(u)| - b^-(u)$ funksiyalarını təyin edirik.

Tutaq ki, $b \in L_1^{loc}(H_n)$ və $B(u,r)$ mərkəzi $u \in H_n$-də olan $r$ radiuslu kürədir.

$$b_{B(u,r)} = \frac{1}{|B(u,r)|} \int_{B(u,r)} b(v)dv$$

$B(u,r)$ kürəsində $b$ funksiyasının orta ossilasiya qiyməti adlanır.

**Tərif 3.** Tutaq ki, $b \in L_1^{loc}(H_n)$.

$$\|b\|_* = \sup_{u \in H_n, r>0} \frac{1}{|B(u,r)|} \int_{B(u,r)} \left| b(v) - b_{B(u,r)} \right| dv < \infty$$

şərtini ödəyən $b$ funksiyalar çoxluğunun əmələ gətirdiyi fəza $BMO$ fəzası adlanır və $BMO(H_n)$ ilə işarə olunur.

Bu paraqrafda aşağıdakı əsas nəticələr əldə edilmişdir.

**Teorem 1.** *Tutaq ki,* $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \alpha < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$, $\varphi_1 \in \Omega_p$ *və* $\varphi_2 \in \Omega_q$.

1. *Onda istənilən* $r > 0$ *üçün* $u$ *və* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə doğru olan*

$$\sup_{r<t<\infty} t^{-\frac{Q}{q}} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(u,s) s^{\frac{Q}{p}} \leq C \varphi_2(u,r) \qquad (1)$$

*şərti* $M_\alpha$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün kafidir. Bundan əlavə, əgər* $p > 1$ *olarsa, onda (1) şərti* $M_\alpha$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün kafidir.*

2. *Əgər* $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ *olarsa, onda istənilən* $r > 0$ *üçün* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə ödənən*

$$r^{\alpha}\varphi_1(r)\le C\varphi_2(r) \qquad (2)$$

*şərti* $M_{\alpha}$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına və* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün zəruri şərtdir.*

3. *Əgər* $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ *funksiyası istənilən* $r>0$ *üçün* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\sup_{r<t<\infty} t^{\alpha}\varphi_1(t)\le Cr^{\alpha}\varphi_1(r)$$

*şərtini ödəyirsə, onda (2) şərti* $M_{\alpha}$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına və bundan əlavə* $p>1$ *olduqda,* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.*

**Qeyd 3.** Bu teoremin 1-ci bəndinin isbatı V.S.Quliyev, A. Akbulut, Y.Y. Mammadovun[1] işində verilmişdir.

**Teorem 2.** *Tutaq ki,* $1\le p<q<\infty$, $0<\alpha<\dfrac{Q}{p}$ *və* $\varphi\in\Omega_p$.

1. *Əgər* $\varphi$ *funksiyası istənilən* $r>0$ *üçün* $u$ *və* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\sup_{r<t<\infty} t^{-\frac{Q}{p}} \operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi(u,s)s^{\frac{Q}{p}} \le C\varphi(u,r) \qquad (3)$$

*şərtini ödəyirsə, onda istənilən* $r>0$ *üçün* $u$ *və* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə verilmiş*

$$r^{\alpha}\varphi(u,r)+\sup_{r<t<\infty} t^{\alpha}\varphi(u,t)\le C\varphi(u,r)^{\frac{p}{q}} \qquad (4)$$

---

[1] Guliyev, V.S., Akbulut, A., Mammadov, Y.Y. Boundedness of fractional maximal operator and their higher order commutators in generalized Morrey spaces on Carnot groups // Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. – 2013, 33 (5), – p. 1329-1346.

şərti $M_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün kafi şərtdir. Bundan əlavə, əgər $p>1$ olarsa, onda (4) şərti $M_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün kafi şərtdir.

2. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_p$ olarsa, onda istənilən $r>0$ üçün $r$-dən asılı olmayan müəyyən $C$ sabiti ilə ödənən

$$r^\alpha \varphi(r) \le C\varphi(r)^{\frac{p}{q}} \tag{5}$$

şərti $M_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına və $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri şərtdir.

3. Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_p$ funksiyası istənilən $r>0$ ədədi üçün $r$-dən asılı olmayan müəyyən $C$ ədədi ilə

$$\sup_{r<t<\infty} t^\alpha \varphi(t) \le C r^\alpha \varphi(r)$$

şərtini ödəyirsə, onda (5) şərti $M_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına və bundan əlavə $p>1$ olduqda, $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.

**Teorem 3.** *Tutaq ki,* $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{Q}$, $\varphi_1 \in \Omega_p$, $\varphi_2 \in \Omega_q$ *və* $b \in BMO(H_n)$ *istənilən funksiyadır.*

1. *Onda istənilən* $r>0$ *üçün* $u$ *və* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə doğru olan*

$$\sup_{r<t<\infty} t^{-\frac{Q}{q}}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi_1(u,s)s^{\frac{Q}{p}} \leq C\varphi_2(u,r) \qquad (6)$$

*şərti $M_{b,\alpha}$ kommutatorunun $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün kafi şərtdir.*

2. *Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ olarsa, onda (2) şərti $M_{b,\alpha}$ kommutatorunun $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri şərtdir.*
3. *Əgər $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ funksiyası istənilən $r>0$ üçün $u$ və $r$-dən asılı olmayan müəyyən $C$ sabiti ilə*

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^{\alpha}\varphi_1(t) \leq Cr^{\alpha}\varphi_1(r)$$

*şərtini ödəyirsə, onda (2) şərti $M_{b,\alpha}$ kommutatorunun $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.*

**Qeyd 4.** Bu teoremin 1-ci bəndinin isbatı V.S.Quliyev, A. Akbulut, Y.Y. Mammadovun[1] işində verilmşdir.

**Nəticə 1.** *Tutaq ki,* $1<p<\infty$, $0 \leq \alpha < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{Q}$, $\varphi_1 \in \Omega_p$, $\varphi_2 \in \Omega_q$, $b \in BMO(H_n)$ *və* $b^- \in L_\infty(H_n)$. *Əgər* $(\varphi_1,\varphi_2)$ *cütü (6) şərtini ödəyirsə, onda* $[b,M_\alpha]$ *kommutatoru* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhduddur.*

**Teorem 4.** *Tutaq ki,* $1<p<q<\infty$, $0<\alpha<\frac{Q}{p}$, $\varphi \in \Omega_p$ *və* $b \in BMO(H_n)$.

1. *Əgər $\varphi$ funksiyası istənilən $r>0$ üçün $u$ və $r$-dən asılı olmayan müəyyən $C$ sabiti ilə*

$$\sup_{r<t<\infty} t^{-\frac{Q}{p}}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty}\varphi(u,s)s^{\frac{Q}{p}} \leq C\varphi(u,r) \qquad (7)$$

şərtini ödəyən və hər bir $u \in H_n$ üçün süryektiv funksiyadırsa, onda istənilən $r > 0$ üçün $u$ və $r$ -dən asılı olmayan müəyyən $C$ sabiti ilə doğru olan

$$r^{\alpha}\varphi(u,r) + \sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)t^{\alpha}\varphi(u,t) \le C\varphi(u,r)^{\frac{p}{q}} \qquad (8)$$

*şərti* $M_{b,\alpha}$ *kommutatorunun* $M_{p,\varphi}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün kafi şərtdir.*

2. *Əgər* $\varphi \in \mathcal{G}_p$ *olarsa, onda (5) şərti* $M_{b,\alpha}$ *kommutatorunun* $M_{p,\varphi}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün zəruri şərtdir.*
3. *Əgər* $\varphi \in \mathcal{G}_p$ *funksiyası suryektiv funksiyadırsa və istənilən* $r > 0$ *ədədi və* $r$ *-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *ədədi ilə*

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\frac{t}{r}\right)t^{\alpha}\varphi(t) \le Cr^{\alpha}\varphi(r)$$

*şərtini ödəyirsə, onda (5) şərti* $M_{b,\alpha}$ *kommutatorunun* $M_{p,\varphi}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.*

**Nəticə 2.** *Tutaq ki,* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < \frac{Q}{p}$, $\varphi \in \Omega_p$ *və* $b \in BMO(H_n)$ *və* $b^{-} \in L_{\infty}(H_n)$. *Əgər* $\varphi$ *funksiyası hər bir* $u \in H_n$ *üçün süryektiv funksiyadırsa və (7) və (8) şərtlərini ödəyirsə, onda* $[b, M_{\alpha}]$ *kommutatoru* $M_{p,\varphi}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ *fəzasına məhduddur.*

Paraqraf 1.4-də $I_{\alpha}$ kəsr inteqral operatorun $M_{p,\varphi}(H_n)$ ümumiləşmiş Morri fəzalarında zəif və güclü məhdudluqlarını araşdırırıq.

Tutaq ki, $f \in L_1^{loc}(H_n)$. $I_\alpha$ kəsr inteqral operator aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$I_\alpha f(u) = \int_{H_n} \frac{f(v)}{|u^{-1}v|^{Q-\alpha}} dv,$$

burada $0 < \alpha < Q$.

Aşağıdakı lemma alınmış əsas nəticələrin isbatında istifadə olunmuşdur.

Bu paraqrafda aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır.

**Teorem 5.** *Tutaq ki,* $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$, $\varphi_1 \in \Omega_p$ *və* $\varphi_2 \in \Omega_q$.

1. *Onda istənilən* $r > 0$ *üçün* $u$ *və* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə doğru olan*

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(u,s) s^{\frac{Q}{p}}}{t^{\frac{Q}{q}}} \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(u,r) \qquad (9)$$

   *şərti* $I_\alpha$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün kafidir. Bundan əlavə, əgər* $p > 1$ *olarsa, onda (9) şərti* $I_\alpha$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün kafidir.*
2. *Əgər* $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ *olarsa, onda (2) şərti* $I_\alpha$ *operatorunun* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına və* $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ *fəzasına məhdud olması üçün zəruri şərtdir.*
3. *Əgər* $\varphi_1 \in \mathcal{G}_p$ *funksiyası istənilən* $r > 0$ *üçün* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi_1(t)dt \le Cr^\alpha \varphi_1(r)$$

*requlyarlıq şərtini ödəyirsə, onda (2) şərti $I_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi_2}(H_n)$ fəzasına və bundan əlavə $p>1$ olduqda, $M_{p,\varphi_1}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi_2}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.*

**Qeyd 5.** Bu teoremin 1-ci bəndinin isbatı V.S Quliyev, A Eroğlu, Y.Y. Mammadovun[2] işində verilmşdir.

**Teorem 6.** *Tutaq ki,* $1 \le p < q < \infty$, $0 < \alpha < \dfrac{Q}{p}$ *və* $\varphi \in \Omega_p$.

1. *Əgər $\varphi$ funksiyası (3) şərtini ödəyirsə, onda istənilən $r>0$ üçün $u$ və $r$-dən asılı olmayan müəyyən $C$ sabiti ilə verilmiş*

$$r^\alpha \varphi(u,r) + \int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi(u,t)dt \le C\varphi(u,r)^{\frac{p}{q}} \qquad (10)$$

*şərti $I_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün kafi şərtdir. Bundan əlavə, əgər $p>1$ olarsa, onda (10) şərti $I_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün kafi şərtdir.*

2. *Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_p$ olarsa, onda (5) şərti $I_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına və $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri şərtdir.*

3. *Əgər $\varphi \in \mathcal{G}_p$ funksiyası istənilən $r>0$ ədədi üçün $r$-dən asılı olmayan müəyyən $C$ sabiti ilə*

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1}\varphi(t)dt \le C r^\alpha \varphi(r)$$

---

[2] Guliyev, V.S., Eroglu, A., Mammadov Y.Y. Riesz potential in generalized Morrey spaces on the Heisenberg group // Problems in mathematical analysis, – 2013, No. 68. J. Math. Sci. (N. Y.) 189 (3), – p. 365-382.

*şərtini ödəyirsə, onda (5) şərti $I_\alpha$ operatorunun $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $WM_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına və bundan əlavə $p>1$ olduqda, $M_{p,\varphi}(H_n)$ fəzasından $M_{q,\varphi^{\frac{p}{q}}}(H_n)$ fəzasına məhdud olması üçün zəruri və kafi şərtdir.*

Dissertasiya işinin ikinci fəslinin birinci paraqrafında ümumiləşmiş çəkili Morri fəzaları haqqında bəzi məlumatlar və bu fəsilin ikinci və üçüncü paraqrafında istidadə edilmiş məlumatlar qeyd olunmuşdur.

Biz çəki funksiyası dedikdə $H_n$ Heyzenberq qrupunda lokal inteqrallanan və sanki hər yerdə $(0,\infty)$ intervalında qiymətlər alan funksiya nəzərdə tutacağıq.

$\omega$ çəki funksiyası və $E$ ölçülən çoxluğu üçün $\omega(E)=\int\limits_E \omega(u)du$ funksiyasını təyin edirik.

Tutaq ki, $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ və $B\subset H_n$ istənilən kürədir. Əgər $\omega$ çəki funksiyası

$$[\omega]_{A_{p,q}}=\sup_B[\omega]_{A_{p,q}(B)}=\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B\omega(u)^q du\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B\omega(u)^{-p'}du\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

şərtini ödəyirsə, bu zaman deyilir ki, $\omega$ funksiyası $A_{p,q}(H_n)$ Makenhaof-Viden sinfindəndir.

Əgər $1<q<\infty$ və

$$[\omega]_{A_{1,q}}=\sup_B[\omega]_{A_{1.q}(B)}=\sup_B\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B\omega(u)^q du\right)^{\frac{1}{q}}\left(\operatorname{ess\,sup}_{u\in B}\frac{1}{\omega(u)}\right)<\infty$$

olarsa, deyilir ki, $\omega$ funksiyası $A_{1,q}(H_n)$ Makenhaof - Viden sinfindəndir.

**Tərif 4.** Tutaq ki, $1 \le p < \infty$ və $\varphi$ funksiyası $H_n \times (0,\infty)$-da təyin olunmuş müsbət ölçülən funksiya, $\omega$ isə çəki funksiyasıdır. $M_{p,\varphi}(H_n,\omega) \equiv M_{p,\varphi}(\omega)$ ümumiləşmiş çəkili Morri fəzası

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}(\omega)} = \sup_{u\in H_n, r>0} \varphi(u,r)^{-1} \omega(B(u,r))^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(u,r))}$$

sonlu normasına malik $f \in L^{loc}_{p,\omega}(H_n)$ funksiyaları çoxluğunun əmələ fəzadır. Bundan əlavə $WM_{p,\varphi}(H_n,\omega) \equiv WM_{p,\varphi}(\omega)$ ümumiləşmiş çəkili zəif Morri fəzası

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}(\omega)} = \sup_{u\in H_n, r>0} \varphi(u,r)^{-1} \omega(B(u,r))^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_{p,\omega}(B(u,r))}$$

sonlu normasına malik $f \in WL^{loc}_{p,\omega}(H_n)$ funksiyaları çoxluğunun əmələ gətirdiyi fəzadır.

Paraqraf 2.2-də biz $M_\alpha$ kəsr maksimal operatorun $M_{p,\varphi}(H_n)$ ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında zəif və güclü məhdudluğunu araşdırırıq. Eyni zamanda, $M_{b,\alpha,k}$ yüksək tərtib kəsr maksimal kommutatorun və $M_\alpha$ kəsr maksimal operatorun $[b, M_\alpha]$ kommutatorunun $M_{p,\varphi}(H_n,\omega)$ ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluqlarını öyrənirik.

Tutaq ki, $f, b \in L^{loc}_1(H_n)$. $M_{b,\alpha,k}$ yüksək tərtib kəsr maksimal kommutator aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$M_{b,\alpha,k} f(u) = \sup_{r>0} |B(u,r)|^{-1+\frac{\alpha}{Q}} \int_{B(u,r)} |b(u)-b(v)|^k |f(v)| dv,$$

burada $0 \le \alpha < Q$ və $k$ müsbət tam ədəddir.

Bu paraqrafda alınmış əsas nəticələr aşağıdakılardır.

**Teorem 7.** *Tutaq ki,* $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$, $\omega \in A_{p,q}(H_n)$, $\varphi_1 \in \Omega_p$, $\varphi_2 \in \Omega_q$ *və* $(\varphi_1,\varphi_2)$ *cütü ixtiyari* $r > 0$ *üçün* $u$ *və* $r$ *-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\sup_{r<t<\infty} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(u,s)\left(\omega^p(B(u,s))\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\omega^q(B(u,t))\right)^{\frac{1}{q}}} \le C\varphi_2(u,r)$$

*şərtini ödəyir. Onda* $p>1$ *olduqda* $M_\alpha$ *operatoru* $M_{p,\varphi_1}\left(H_n,\omega^p\right)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}\left(H_n,\omega^q\right)$ *fəzasına,* $p=1$ *olduqda isə* $M_{1,\varphi_1}(H_n,\omega)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}\left(H_n,\omega^q\right)$ *fəzasına məhduddur. Başqa sözlə,* $p>1$ *olduqda,* $f$ *funksiyasından asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\|M_\alpha f\|_{M_{q,\varphi_2}(\omega^q)} \le C\|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega^p)},$$

*bərabərsizliyi,* $p=1$ *olduqda isə* $f$ *funksiyasından asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\|M_\alpha f\|_{WM_{q,\varphi_2}(\omega^q)} \le C\|f\|_{M_{1,\varphi_1}(\omega)}$$

*bərabərsizliyi doğrudur.*

**Teorem 8.** *Tutaq ki,* $1<p<\infty$, $0\le\alpha<\frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{Q}$, $\omega\in A_{p,q}(H_n)$, $b\in BMO(H_n)$, $\varphi_1\in\Omega_p$, $\varphi_2\in\Omega_q$ *və* $(\varphi_1,\varphi_2)$ *cütü ixtiyari* $r>0$ *üçün* $u$ *və* $r$*-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\sup_{r<t<\infty}\left(1+\ln\frac{t}{r}\right)^k \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(u,s)\left(\omega^p(B(u,s))\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\omega^q(B(u,t))\right)^{\frac{1}{q}}} \le C\varphi_2(u,r) \quad (11)$$

*şərtini ödəyir. Onda* $M_{b,\alpha,k}$ *kommutatoru* $M_{p,\varphi_1}\left(H_n,\omega^p\right)$ *fəzasından* $M_{p,\varphi_2}\left(H_n,\omega^q\right)$ *fəzasına məhduddur. Bundan əlavə,* $f$ *funksiyasından asılı* olmayan *müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\|M_{b,\alpha,k} f\|_{M_{q,\varphi_2}(\omega^q)} \le C\|b\|_*^k \|f\|_{M_{p,\varphi_1}(\omega^p)}$$

*bərabərsizliyi doğrudur.*

**Nəticə 3.** *Tutaq ki,* $1 < p < \infty$, $0 \le \alpha < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$, $\omega \in A_{p,q}(H_n)$, $b \in BMO(H_n)$, $b^- \in L_\infty(H_n)$, $\varphi_1 \in \Omega_p$, $\varphi_2 \in \Omega_q$ *və* $(\varphi_1, \varphi_2)$ *(11) şərtini ödəyir. Onda* $[b, M_\alpha]$ *operatoru* $M_{p,\varphi_1}(H_n, \omega^p)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n, \omega^q)$ *fəzasına məhduddur.*

Paraqraf 2.3-də $I_\alpha$ kəsr inteqral operatorun $M_{p,\varphi}(H_n, \omega)$ ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında zəif və güclü məhdudluğunu və $I_\alpha$ kəsr inteqral operatorun $[b, I_\alpha]^k$ yüksək tərtib kommutatorunun $M_{p,\varphi}(H_n, \omega)$ ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğunu öyrənirik.

Tutaq ki, $f, b \in L_1^{loc}(H_n)$. $b$ funksiyası və $I_\alpha$ kəsr inteqral operatorunun doğurduğu $[b, I_\alpha]^k$ yüksək tərtib kommutatoru aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$[b, I_\alpha]^k f(u) = \int_{H_n} (b(u) - b(v))^k \frac{|f(v)|}{\left|u^{-1}v\right|^{Q-\alpha}} dv,$$

burada $0 < \alpha < Q$ və $k$ müsbət tam ədəddir.

**Teorem 9.** *Tutaq ki,* $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$, $\omega \in A_{p,q}(H_n)$, $\varphi_1 \in \Omega_p$, $\varphi_2 \in \Omega_q$ *və* $(\varphi_1, \varphi_2)$ *cütü ixtiyari* $r > 0$ *üçün* $u$ *və* $r$ *-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(u,s)\left(\omega^p(B(u,s))\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\omega^q(B(u,t))\right)^{\frac{1}{q}}} \frac{dt}{t} \le C\varphi_2(u,r)$$

*şərtini ödəyir. Onda* $p > 1$ *olduqda olduqda* $I_\alpha$ *operatoru* $M_{p,\varphi_1}(H_n, \omega^p)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}(H_n, \omega^q)$ *fəzasına,* $p = 1$ *olduqda isə* $M_{1,\varphi_1}(H_n, \omega)$ *fəzasından* $WM_{q,\varphi_2}(H_n, \omega^q)$ *fəzasına məhduddur.*

*Başqa sözlə,* $p>1$ *olduqda,* $f$ *funksiyasından asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\left\|I_\alpha f\right\|_{M_{q,\varphi_2}\left(\omega^q\right)} \le C\left\|f\right\|_{M_{p,\varphi_1}\left(\omega^p\right)},$$

*bərabərsizliyi,* $p=1$ *olduqda isə* $f$ *funksiyasından asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\left\|I_\alpha f\right\|_{WM_{q,\varphi_2}\left(\omega^q\right)} \le C\left\|f\right\|_{M_{1,\varphi_1}(\omega)}$$

*bərabərsizliyi doğrudur.*

**Teorem 10.** *Tutaq ki,* $1<p<\infty$, $0<\alpha<\frac{Q}{p}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{Q}$, $\omega\in A_{p,q}(H_n)$, $b\in BMO(H_n)$, $\varphi_1\in\Omega_p$, $\varphi_2\in\Omega_q$ *və* $(\varphi_1,\varphi_2)$ *cütü ixtiyari* $r>0$ *üçün* $u$ *və* $r$ *-dən asılı olmayan müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\int_r^\infty \left(1+\ln\frac{t}{r}\right)^k \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(u,s)\left(\omega^p\left(B(u,s)\right)\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\omega^q\left(B(u,t)\right)\right)^{\frac{1}{q}}}\frac{dt}{t} \le C\varphi_2(u,r)$$

*şərtini ödəyir. Onda* $[b,I_\alpha]^k$ *kommutatoru* $M_{p,\varphi_1}\left(H_n,\omega^p\right)$ *fəzasından* $M_{q,\varphi_2}\left(H_n,\omega^q\right)$ *fəzasına məhduddur. Bundan əlavə,* $f$ *funksiyasından asılı* olmayan *müəyyən* $C$ *sabiti ilə*

$$\left\|[b,I_\alpha]^k f\right\|_{M_{q,\varphi_2}\left(\omega^q\right)} \le C\|b\|_*^k\left\|f\right\|_{M_{p,\varphi_1}\left(\omega^p\right)}$$

*bərabərsizliyi doğrudur.*

# NƏTİCƏ

Dissertasiya işi harmonik analizin mühüm operatorlarından olan Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator, kəsr inteqral operator, kəsr maksimal kommutator və kəsr inteqral operatorun kommutatorunun ümumiləşmiş Morri və ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğuna həsr edilmişdir.

Dissertasiya işinin əsas nəticələri aşağıdakılardır:

1. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

2. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr inteqral operatorun ümumiləşmiş Morri fəzalarında məhdudluğu üçün zəruri və kafı şərtlər əldə edilmişdir.

3. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr maksimal operator və kəsr maksimal kommutatorun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

4. Heyzenberq qrupunda təyin olunmuş kəsr inteqral operator və onun kommutatorunun ümumiləşmiş çəkili Morri fəzalarında məhdudluğu üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

**Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:**


1. Eroglu, A. Azizov, J.V. A note of the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on the Heisenberg group // – Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, – 2017, 37(1), – p. 86-91.
2. Azizov, J.V. Characterizations for the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on Carnot groups // International conference on "Operators in Morrey-type spaces and applications" dedicated to 60-th birthday of professor V.S.Guliyev, -Kırşehir – Turkey, -10-13 July, -2017, -p.113.
3. Azizov, J.V, Characterizations for the fractional maximal operators in generalized Morrey spaces on Heisenberg groups // International conference "Modern problems of Mathematics and Mechanics" devoted to the 100-th anniversary of corr.- member of ANAS Goshgar Ahmedov, – Baku: –02-03 November, – 2017 – p. 68.
4. Eroglu, A. Guliyev, V.S. Azizov, J.V. Characterizations for the fractional integral operators in generalized Morrey spaces on Carnot groups // Mat. Zametki, – 2017, (102), no. 5, – p. 789-804; translation in Math. Notes, – 2017, 102, no. 5-6. – p. 722-734.
5. Eroglu, A. Azizov, J.V., Guliyev, V.S. Fractional maximal operator and its commutators in generalized Morrey spaces on Heisenberg group // – Baku: Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., – 2018, 44 (2), – p. 304-317.
6. Azizov, J.V. Fractional maximal commutator in generalized Morrey spaces on Heisenberg group // International conference "Modern problems of mathematics and mechanics" devoted of the 60th anniversary of the Institute of Mathematics and Mechanics of ANAS, – Baku: –23-25 October, – 2019. – p. 142-143.
7. Azizov, J.V. Fractional integral operator and its higher order commutators in generalized weighted Morrey spaces on

Heisenberg group // – Baku: Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 39 (4), 25-36.
8. Azizov, J.V. Fractional maximal commutator in generalized Morrey spaces on Heisenberg group // International Conference “Modern problems of mathematics and mechanics” dedicated to the 80-th anniversary of academician Akif Hajiyev. – Baku: –6-8 December, – 2019, – p. 52
9. Azizov, J.V. Fractional maximal operator and its higher order commutators in generalized weighted Morrey spaces on Heisenberg group // – Baku: Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, – 2020, 40 (1), – p. 66-78.
10. Azizov, J.V. The boundedness of fractional integral operators in generalized weighted Morrey spaces on Heisenberg groups // International conference “Modern problems of mathematics and mechanics” dedicated to the 110-th anniversary of the academician Ibrahim Ibrahimov, – Baku: – 29 June-01 July, – 2022, – p. 58-59.
11. Azizov, J.V. The boundedness of commutator of fractional integral operators in generalized weighted Morrey spaces on Heisenberg groups // The 8th International conference on “Control and optimization with industrial applications”, – Baku: COIA 2022, – 26-28 August, – 2022, v. I, – p. 132-134.
12. Azizov, J.V. Boundedness of fractional maximal operator in generalized weighted Morrey spaces on Heisenberg groups // The international conference “Modern problems of mathematics and mechanics” dedicated to the 100-th anniversary of the national leader Heydar Aliyev, – Baku: – 26-28 April, – 2023, – p. 124-126.

Dissertasiyanın müdafiəsi **21 iyun 2024-cü il** tarixində saat **$14^{00}$**-da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Avtoreferatın elektron versiyası Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **17 may 2024-cü il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 03.05.2024
Kağızın formatı: 60x841/16
Həcm: 38392
Tiraj: 100