AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

KƏSİLƏN DİRAK OPERATORUNUN MƏXSUSİ VƏ QOŞULMUŞ FUNKSİYALAR SİSTEMİNİN SPEKTRAL XASSƏLƏRİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Leyla Zakirovna Buksayeva**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2024

Dissertasiya işi Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin «Riyazi analiz» kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Vəli Məhərrəm oğlu Qurbanov

Rəsmi opponentlər:
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Nazim Baxış oğlu Kərimov
riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
Yaşar Topuş oğlu Mehrəliyev
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent
Elvin Ibrahim oğlu Əzizbəyov

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri: AMEA-nın müxbir üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
__________ **Misir Cumail oğlu Mərdanov**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: fizika-riyaziyyat elmləri namizədi
__________ **Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev**

Elmi seminarın sədri: fizika-riyaziyyat elmləri doktoru, professor
__________ **Nizaməddin Şirin oğlu İsgəndərov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi: Son illərdə kvant mexanikasının inkişafı ilə əlaqədar olaraq diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi xüsusi ilə inkişaf etmişdir.

Diferensial operatorun spektrinin araşdırılması, bu operatorun doğurduğu kök funksiyaların sisteminin müxtəlif funksiyalar fəzalarında bazisliyi; verilmiş funksiyanın araşdırılan operatorun kök funksiyalar sistemi üzrə spektral ayrılışının həmin funksiyanın triqonometrik Furye sırası ilə birgəyığılması; tədqiq olunan operatorun təyin oblastı ilə üst-üstə düşməyən siniflərdən olan funksiyaların spektral ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılmasının araşdırılması və s. spektral nəzəriyyənin ən mühüm tədqiqatlarındandırlar.

Adi diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsi üzrə tədqiqatların başlanğıcı J. Liuvillin, Ş. Şturmun klassik işlərindən başlayır, bu nəzəriyyənin sonrakı inkişafına isə V. A. Steklov, D. Ya. Tamarkin, D. Birkkof, M. L. Rəsulov və digər riyaziyyatçılar mühüm töhfələr vermişlər.

Özünə qoşma olmayan məsələləri tədqiq edərkən, müəyyən edilmişdir ki, bu tip məsələlərin məxsusi funksiyalar sistemi ümumiyyətlə, L_2-də bazis təşkil etməyə bilər və hətta L_2-də tam olmaya da bilər. Buna görə də verilmiş belə sistemlər qoşulmuş funksiyalarla tamamlanmalıdır. Bu növ məsələlərdə məxsusi və qoşulmuş funksiyalar sistemi L_2-də ortoqonal sistem təşkil etmir, onun nə qapalılığı, nə də minimallığı onun bazisliyini təmin etmir. Beləliklə, özünə qoşma olmayan məsələlərin tədqiqi yeni metodlara ehtiyac yaradır.

Xüsusi qurulmuş kök funksiyalar sisteminin (M.V. Keldışə görə kanonik sistemin) L_2-də tamlıq faktı geniş sinif sərhəd məsələləri üçün ilk dəfə M.V.Keldış tərəfindən isbat edilmişdir. Sonralar tamlıq məsələləri V.B.Lidskinin, M.A.Naymarkın, V.N.Viziteya və A.C.Markusun, J.E.Allahverdiyevin, M.Q.Qasımov və M.Q.Cavadovun, A.M.Krallın, A.A.Şkalikovun və başqa alimlərin əsərlərində araşdırılmışdır.

Güclü requlyar sərhəd məsələləri üçün kök funksiyalar sistemin L_2-də Riss bazisliyi V.P.Mixaylov və G.M.Keselman tərəfindən isbat edilmişdir. Requlyar sərhəd şərtli (güclü requlyar olmayan) diferensial operatorun kök funksiyalar sisteminin mötərizəli bazisliyi isə A.A.Şkalikov tərəfindən göstərilmişdir.

Requlyar sərhəd şərtli və kifayət qədər hamar əmsallı adi diferensial operatorlar üçün müntəzəm birgəyığılmaya aid ən ümumi nəticələrdən biri Ya.D.Tamarkin tərəfindən alınmışdır. Analoji nəticələr cəmlənən əmsallı operator üçün M. Stoun tərəfindən isbat edilmişdir. Bu qeyd olunan tədqiqat işləri rezolvent metoduna əsaslanır və nəticədə alınan birgəyığılma mötərizəli birgəyığılmadır.

Keçən əsrin 80-ci illərdən başlayaraq yeni metoddan, yani diferensial operatorların öyrənilməsi üçün V.A.İlinin təklif etdiyi metoddan da istifadə edilir. O, aşkar etmişdir ki, sonsuz sayda təkrarlan məxsusi ədələr olduqda, tamlıq xassəsindən fərqli olaraq, bazislik və birgəyığılma xassələri 1) kök funksiyalarının seçimindən ciddi asılıdır; 2) yalnız müəyyən bir sərhəd şərtlərinin növü ilə müəyyən edilmir, bu xassələrə diferensial operatorun əmsallarının qiymətləri də təsir edir və bu xassələr bu əmsalların verildiyi siniflərin metrikasında əmsalların qiymətlərinin hər hansı kiçik dəyişikliyində dəyişir. Beləliklə, bu vəziyyətdə sərhəd şərtləri terminlərində bazislik və birgəyığılma şərtlərini formalaşdırmaq mümkün olmur.

V.A. İlin[1] müəyyən təbii şərtlər daxilində adi diferensial operatorun kök funksiyalar sistemi üçün birgəyığılma və bazislik teoremlərini isbat etmişdir.

Sonralar bu tədqiqatlar V.A.İlin və onun davamçıları V.V.Tixomirov, İ.S.Lomov, N.B.Kərimov, V.D.Budaev, V.İ.Komornik, L.V.Kritskov, V.M.Qurbanov və digərləri tərəfindən davam etdirilmişdir.

---

[1] Ильин, В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений I //-Москва: Дифференциальные уравнения, -1980. т.16, №5, -с.771-794

Dirac operatorunun kök funksiyalar sistemlərinin şərtsiz bazisliyi məsələləri V.M.Kurbanovun, V.M.Kurbanov[2] və A.M.Abdullayevanın işlərində tədqiq edilmişdir. Bu işlərdə L_2^2-də Dirac operatorunun kök vektor funksiyalar sistemlərində besselliyi və şərtsiz bazisliyi meyarlıarı müəyyən edilmişdir. Dirak operatorunun kompaktda ayrılışının komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması, spektral ayrılışın müntəzəm yığılması və kök vektor-funksiyalar sisteminin Riss sistemi əmələ gətirməsi sualları A.İ.İsmayılovanın, V.M.Qurbanov və A.İ.İsmayılovanın işlərində araşdırılmışdır.

Müəyyən sərhəd şərtləri ilə verilmiş Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sistemlərinin bazisliyi İ.Troşin və M.Yamomotanın, P.Djakov və B.Mityaqinin, L.L.Oridoroqa və S.Xassinin işlərində tədqiq edilmişdir.

Potensialı L_p -dən ($p \geq 1$) olan Dirak operatoru A.M. Savçuk və A.A. Şkalikov, A.M. Savçuk və I.V. Sadovniçayanın işlərində tədqiq edilmişdir və güclü requlyar sərhəd şərtləri halında Riss bazisliyi, requlyar (lakin güclü requlyar olmayan) sərhəd şərtləri halında isə alt fəzalardan Riss bazisliyi isbat edilmişdir. A.A. Lunev və M.M. Malamud işində potensialı L_1 sinifdən olan və güclü requlyar sərhəd şərtli Dirac tipli 2×2 sistemi tədqiq edilmişdir və Riss bazisliyi haqqında teorem isbat edilmişdir.

Yuxarıda deyilənlərə əsasən, diferensial operatorların və həmçinin Dirak tipli operatorların V.A.İlin metodu ilə araşdırlımasının davam etdirilməsi maraq kəsb edir.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Dissertasiya işinin əsas obyekti kəsilən Dirak operatorudur. Tədqiqatın predmeti kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyaları üzrə spektral ayrılışın mütləq və müntəzəm yığılmasının, komponent üzrə müntəzəm birgəyığılmasının, kök vektor-funksiyalar sisteminin bazisliyi məsələlərin öyrənilməsidir.

---

[2] Kurbanov, V.M., Abdullaeva, A.M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // -Zagreb: Operators and Matrics., -2018. v.12, №4, -pp.943-954

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sistemin $L_2^2(0,2\pi)$-də besselliyini, şərtsiz bazisliyini (Riss bazisliyi) tədqiq etmək. $L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p < \infty$, fəzasında ekvivalent bazisliyi haqqında teoremi isbat etmək. Verilmiş operatorun kök vektor-funksiyalar üzrə biortoqonal ayrılışın mütləq və müntəzəm yığılması məsələlərini tədqiq etmək. $W_{p,2}^{1,m}$, $p \geq 1$, sinfindən olan vektor-funksiyaların biortoqonal ayrılışının müntəzəm yığılması üçün zəruri və kafi şərti isbat etmək və müntəzəm yığılmanın sürətini qiymətləndirmək. Kompaktda adi triqonometrik sıra ilə spektral ayrılışın komponent üzrə müntəzəm birgəyığılmasını tədqiq etmək. Kompaktda komponentlər üzrə birgəyığılma üçün zəruri şərti, komponent üzrə müntəzəm birgəyığılma üçün zəruri və kafi şərtləri isbat etmək.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində funksional və harmonik analizin, diferensial operatorlarının spektral nəzəriyyəsinin üsulları tətbiq olunur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sistemi üçün Riss bərabərsizliyi.
- Kəsilən Dirak operatorunun məxsusi və qoşulmuş vektor-funksiyalar sisteminin $L_2^2(0,2\pi)$-də şərtsiz bazisliyi üçün zəruri və kafi şərtlər.
- Kəsilən Dirak operatorunun məxsusi və qoşulmuş vektor-funksiyalar sisteminin $L_p^2(0,2\pi)$, $(1 < p < \infty)$, fəzasında ekvivalent bazisliyi haqqında teorem.
- $W_{p,2}^{1,m}(0,2\pi)$, $p \geq 1$ sinfindən olan funksiyaların spektral ayrılışlarının mütləq və müntəzəm yığılması haqqında teorem.
- Kompaktda spektral ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması üçün zəruri şərt.
- Potensial sıfır olduqda adi triqonometrik sıra ilə spektral ayrılışın komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması üçün zəruri və kafi şərt.

- Potensiallı $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$, $p>2$, fəzasından olan kəsilən Dirak operatoru üçün spektral ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması haqqında teorem.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sisteminin Riss bərabərsizliyini ödəməsi üçün zəruri şərt alınmışdır.
- Kəsilən Dirak operatorunun kök-vektor funksiyalar sisteminin $L_p^2(0,2\pi)$ $1<p\le 2$, fəzasında rissliyi üçün meyar alınmışdır.
- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sisteminin $L_2^2(0,2\pi)$ fəzasında şərtsiz bazisliyi üçün meyar alınmışdır.
- Kəsilən Dirak operatorunun kök (məxsusi və qoşulmuş) vektor-funksiyalar sisteminin $L_p^2(0,2\pi)$,$1<p<\infty$, fəzasında ekvivalent bazisliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur.
- $W_{p,2}^{1,m}(0,2\pi)$ $(p\ge 1)$ sinfindən olan funksiyaların spektral ayrılışlarının mütləq və müntəzəm yığılması haqqında teorem isbat olunmuşdur.
- Spektral ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması üçün zəruri, zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.
- Potensiallı $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$, $p>2$, fəzasından olan kəsilən Dirak operatoru üçün spektral ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İş nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiya işinin nəticələri diferensial operatorların spektral nəzəriyyəsində, riyazi fizikanın məsələlərinin həllinin Furye üsulu ilə əsaslandırılmasında və funksiyaların approksimasiyası nəzəriyyəsində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri məruzə edilmişdir: Professor A.Ş.Həbibzadənin 100 illik yubileyinə həsr olunmuş "Funksional analiz və onun tətbiqləri" Respublika elmi konfransında (Bakı, 2016); Sumqayıt Dövlət Universitetinin 55 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" Beynəlxalq elmi konfransında (Sumqayıt, 2017); Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 95 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri" Respublika elmi konfransında (Bakı, 2018); Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компютерных наук, (Махачкала,2019); Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения-XXII, (Воронеж, 2021); Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasının (r.e.d., prof. B.Ə.Əliyev); Bakı Dövlət Universitetinin "Riyazi fizika tənlikləri" kafedrasının (akademik Y.Ə. Məmmədov) seminarlarında məruzə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhvəsi. Alınmış bütün nəticələr və təkliflər şəxsən müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Dissertasiyanın əsas nəticələri 10 elmi əsərlərində dərc edilmişdir, əsərlərin siyahısı avtoreferatın sonunda verilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı.

Dissertasiya işi Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işinin ümumi həcmi–202629 işarə (titul səhifəsi–364 işarə, mündəricat–1656 işarə, giriş–46609 işarə, I fəsil–86000 işarə, II fəsil–66000 işarə, nəticə–2000 işarə). İstifadə olunan ədəbiyyat siyahısı 107 ədəbiyyatdan ibarətdir.

DİSSERTASİYANIN MƏZMUNU

Dissertasiyada sonlu intervalda kompleks-qiymətli cəmlənən potensiallı kəsilən Dirak operatoruna baxılır.

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticə və istifadə olunan ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Hər bir fəsil paraqraflara bölünüb.

Dissertasiyanın **birinci fəsili** rissllik, bazislik, mütləq və müntəzəm yığılma məsələlərinin tədqiqinə həsr edilmişdir.

Tutaq ki, $\{\xi_i\}_{i=0}^{m}$, $a=\xi_0<\xi_1<\ldots<\xi_m=b$, nöqtələri $G=(a,b)$ intervalında bölgü təyin edirlər. $G_l=(\xi_{l-1},\xi_l),\ l=\overline{1,m}$ işarə edək. A_l ilə $\overline{G_l}$ - də mütləq kəsilməz ikikomponentli vektor-funksiyalar sinfini işarə edək. $A(a,b)$ sinfini aşağıdakı kimi təyin edək: əgər $f(x)\in A(a,b)$, onda hər bir $l=\overline{1,m}$ üçün elə $f_l(x)\in A_l$ vektor-funksiyası var ki, $f(x)=f_l(x)$, $\xi_{l-1}<x<\xi_l$.

Tutaq ki, $L_p^2(G)$, $p\geq 1$,

$$\|f\|_p\equiv\|f\|_{p,2}\equiv\|f\|_{p,2,G}=\left(\int_G|f(x)|^p dx\right)^{1/p}=\left\{\int_G\left(\sum_{j=1}^{2}\left|f_j(x)\right|^2\right)^{p/2}dx\right\}^{1/p}$$

normalı iki komponentli $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$ vektor-funksiyalar fəzasıdır.

$p=\infty$ halında norma

$$\|f\|_\infty\equiv\|f\|_{\infty,2}=\sup_{x\in\overline{G}}vrai\,|f(x)|$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Aydındır ki, $p^{-1}+q^{-1}=1,\ 1\leq p\leq\infty$, olduqda ixtiyari $f(x)=L_p^2(G)$, $g(x)=L_q^2(G)$ vektor-funksiyaları üçün

$$(f,g)=\int_G\langle f(x),g(x)\rangle\,dx$$

“skalyar hasili” təyin olunub, burada $\langle f(x),g(x)\rangle=\sum_{i=1}^{2}f_1(x)\overline{g_i(x)}$.

$L_p(G)\otimes C^{2\times 2}$, $1\leq p\leq\infty$, ilə elementləri $L_p(G)$ fəzasından olan 2×2 ölçülü matris-funksiyalar fəzasını işarə edək.

$$Ly=B\frac{dy}{dx}+P(x)y\,,\;\; x\in\bigcup_{\ell=1}^{m}G_\ell$$

Dirak operatoruna baxaq. Burada

$$B=\left(b_{ij}\right)_{ij=1}^{2},b_{i,3-i}=(-1)^{i-1},\; b_{ii}=0,\; y(x)=\left(y_1(x),y_2(x)\right)^T,$$

$$P(x)=diag\left(p(x),q(x)\right),$$

$p(x)$ və $q(x)$ isə G -də kompleksqiymətli cəmlənən funksiyalardır.

V.A.İlinin işlərinə əsaslanaraq L operatorunun kök vektor-funksiyalar anlayışını sərhəd şərtlərinin şəklindən və "tikilmə" şərtlərindən asılı olmadan başa düşəcəyik, yəni: L operatorunun λ kompleks məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor-funksiya dedikdə, G -də sanki hər yerdə $L\overset{0}{y}=\lambda\overset{0}{y}$ tənliyini ödəyən eyniliklə sıfır olmayan ixtiyari $\overset{0}{y}(x)\in A(a.b)$ kompleksqiymətli vektor-funksiyası başa düşülür. Analoji olaraq, həmin λ -ya və $\overset{0}{y}(x)$ məxsusi vektor-funksiyasına uyğun olan $r, r\geq 1$ tərtibli qoşulmuş vektor-funksiyanın dedikdə isə G -də sanki hər yerdə $L\overset{r}{y}=\lambda\overset{r}{y}+\overset{r-1}{y}$ tənliyini ödəyən ixtiyari $\overset{r}{y}(x)\in A(a,b)$ kompleksqiymətli vektor-funksiyası başa düşülür.

Tutaq ki, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ L operatorunun kök (məxsusi və qoşulmuş) vektor-funksiyalarından ibarət ixtiyari sistemdir, $\{\lambda_k\}_{k=\infty}^{\infty}$ isə ona uyğun məxsusi qiymətlər sistemidir. Bundan əlavə, hər bir $u_k(x)$ vektor-funksiyası bu $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə özündən aşağı tərtibli bütün uyğun qoşulmuş funksiyaları ilə birgə daxil olur. Bu isə o deməkdir ki, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemin hər bir $u_k(x)$ elementi G -də sanki hər yerdə ya

$$Lu_k=\lambda_k u_k \tag{1}$$

tənliyini (bu halda $u_k(x)$ məxsusi vektor-funksiyadır), ya da

$$Lu_k = \lambda_k u_k + u_{\nu(k)}, \tag{2}$$

tənliyi ödəyir, harada $\nu(k)$ birmənalı olaraq k nömrəsi ilə təyin olunur və $k_1 \neq k_2$ olduqda $\nu(k_1) \neq \nu(k_2)$ (bu halda $\lambda_k = \lambda_{\nu(k)}$, $u_k(x)$ isə $r \geq 1$ tərtibli qoşulmuş vektor-funksiyadır, $u_{\nu(k)}(x)$ isə $r-1$ tərtibli qoşulmuş vektor-funksiyadır). Qoşulmuş funksiyalar zəncirləri məhdud olduqda (2) tənliyində $\nu(k) = k-1$, $u_{\nu(k)} = \theta_k u_{k-1}$ qəbul edilir. Bu halda θ_k ya 0-ra (bu halda $u_k(x)$-məxsusi vektor-funksiyadır), ya da 1-ə (bu halda $u_k(x)$- qoşulmuş funksiyadır $\lambda_{k-1} = \lambda_k$) bərabər götürülür.

1.1-də bazislər nəzəriyyəsindən bəzi anlayışlar və bəzi faktlar gətirilir.

Tərif 1. *Əgər elə $M(p)$ sabiti varsa ki, ixtiyari $f(x) \in L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p \leq 2$, üçün*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f,\varphi_k)|^q \leq M \| f \|_p^q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

bərabərsizliyi ödənilir, onda $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_q^2(0,2\pi)$ sistemi Riss sistemi adlanır (və ya Riss bərabərsizliyini ödəyir).

Qeyd edək ki, $p = q = 2$ olduqda $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^2(0,2\pi)$ sistemi Bessel sistemi olur.

Tərif 2. *Əgər*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k - \psi_k\|_p^p < \infty,$$

münasibəti ödənilirsə, onda $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(0,2\pi)$, $p \geq 1$, sistemi $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(0,2\pi)$ sisteminə $L_p(0,2\pi)$-də p yaxın adlanır.

Tərif 3. *X Banax fəzasında verilmiş iki elementlər ardıcıllığı üçün elə xətti məhdud və məhdud tərsi olan operator varsa ki, bu ardıcıllıqlardan birini digərinə keçirir, onda bu ardıcıllıqlara X fəzasında ekvivalent ardıcıllıqlar deyilir.*

1.2-də L operatorunun kök vektor-funksiyalar sistemlərinin risslliyi üçün zəruri şərtlər tapılır.

Teorem 1. [1] *Tutaq ki, $p(x)$ və $q(x)$ funksiyaları $L_p(G)$, $1<p\le 2$, sinfinə daxildirlər, kök vektor-funksiyalar zəncirlərinin uzunluqları məhduddurlar. Onda $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k(x)=u_k(x)\|u_k\|_{q,2}^{-1}$, sisteminin Riss bərabərsizliyini ödəməsi üçün*

$$\sum_{|\operatorname{Re}\lambda_k-\nu|\le 1}\frac{|u_k(x)|^q}{\|u_k\|_{q,2}^q}\le K_1\left(1+\sup_{|\operatorname{Re}\lambda_k-\nu|\le 1}|\operatorname{Im}\lambda_k|\right),\quad x\in\overline{G} \tag{3}$$

münasibətinin ödənməsi zəruridir. Burada ν ixtiyari həqiqi ədəddir; K_1 isə ν-dən asılı olmayan sabitdir; $u_k(a)=u_k(a+0)$, $u_k(b)=u_k(b-0)$; $u_k(\xi_i)$, $i=\overline{1,m-1}$, isə $u_k(\xi_i-0)$ və $u_k(\xi_i+0)$ qiymətlərindən ixtiyarı birinə bərabər seçilir; cəmləmə ancaq məxsusi vektor-funksiyalar üzrə aparılır.

Nəticə 1. *Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənir və kök vektor-funksiyalar zəncirlərinin uzunluqları müntəzəm məhduddurlar. Onda $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k(x)=u_k(x)\|u_k\|_{q,2}^{-1}$, sisteminin Riss bərabərsizliyini ödəməsi üçün*

$$\sum_{|\operatorname{Re}\lambda_k-\nu|\le 1}1\le K_2\left(1+\sup_{|\operatorname{Re}\lambda_k-\nu|\le 1}|\operatorname{Im}\lambda_k|\right) \tag{4}$$

münasibətinin ödənməsi zəruridir. Burada K_2 sabiti ν-dən asılı deyil, cəmləmə isə λ_k ədədinin təkrarlanmasını nəzərə almaqla aparılır.

Teorem 2. [1] *Tutaq ki, $p(x)$ və $q(x)$ funksiyaları $L_p(G)$, $1<p\le 2$, sinifə daxildirlər və*

$$\|u_{\nu(k)}\|_{q,2,G_l}\le C_0\left(1+|\operatorname{Im}\lambda_k|\right)^{1/p}\|u_k\|_{q,2,G_l} \tag{5}$$

antiaprior qiymətləndirməsi ödənilir, burada C_0 qoşulmuş funksiyaların tərtibindən asılı deyil, $l=\overline{1,m}$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Onda

$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \varphi_k(x) = u_k(x)\|u_k\|_{q,2}^{-1}$, *sisteminin Riss bərabərsizliyini ödəməsi üçün (3) bərabərsizliyin ödənilməsi zəruridir. Burada cəmləmə bütün kök vektor-funksiyalar üzrə aparılır.*

1.3-də dissertasiyada $(0, 2\pi)$ intervalında kəsilən Dirak operatoruna baxılır. Kök vektor-funksiyaların rissliyi üçün, $L_2^2(0, 2\pi)$-də şərtsiz bazisliyi üçün meyarlar tapılır və $L_p^2(0, 2\pi)$, $1 < p < \infty$,-də ekvivalent bazislik haqqında teoremi isbat edilir. Bu paraqraf iki alt paraqrafa bölünüb. 1.3.1-in əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdir.

Teorem 3 (Risslik meyarı). [5] *Tutaq ki, $p(x)$ və $q(x)$ funksiyaları $L_1(0, 2\pi)$ sinifə daxildirlər, kök vektor-funksiyalar zəncirlərinin uzunluqları müntəzəm məhduddurlar və elə C_0 sabiti var ki,*

$$|\mathrm{Im}\lambda_k| \le C_0, \quad k = 1,2,\dots . \tag{6}$$

Onda $\left\{u_k(x)\|u_k\|_q^{-1}\right\} \subset L_q^2(0,2\pi)$ sistemin rissliyi üçün zəruri və kafi şərt elə M_1 sabitin olmasıdır ki,

$$\sum_{|\mathrm{Re}\,\lambda_k - \tau| \le 1} 1 \le M_1 \tag{7}$$

bərabərsizliyi ödənsin. Burada τ -ixtiyari həqiqi ədəddir.

Qeyd edək ki, $P(x) \in L_p(0,2\pi) \otimes C^{2\times 2}$, $1 < p \le 2$ olduqda Dirak operatoru üçün risslik meyarı əvvəllər V.M. Qurbanov və A.İ. İsmayılovanın işlərində isbat edilmişdir.

Tutaq ki, $L^* = Bd/dx + P^*(x)$ L operatoruna formal qoşma operatordur, burada $P^*(x)$ matrisi $P(x)$-ə qoşma matris-funksiyadır. $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə biortoqonal qoşma sistemini $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ilə işarə edək və fərz edək ki, o, L^* operatorunun kök vektor-funksiyalarından təşkil olunmuşdur, yəni $L^*\upsilon_k = \overline{\lambda_k}\upsilon_k + \theta_{k+1}\upsilon_{k+1}$.

1.3.2-nin əsas nəticələri şərtsiz bazislik və ekvivalent bazislik haqqında teoremlərdir.

Teorem 4. (şərtsiz bazislik haqqında). [5] *Tutaq ki, $p(x)$ və $q(x)$ funksiyaları $L_1(0,2\pi)$ sinifə daxildirlər, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ və $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemlərdən biri $L_2^2(0,2\pi)$-də tamdır, kök vektor-funksiyalar zəncirlərinin uzunluqları müntəzəm məhduddurlar və (6) şərt ödənir. Onda bu sistemlərin hər birinin $L_2^2(0,2\pi)$-də şərtsiz bazisliyi üçün zəruri və kafi şərt elə M_1 və M_2 sabitlərin varlığıdir ki, (7) və*

$$\|u_k\|_2\|\upsilon_k\|_2 \le M_2, \quad k=1,2,... \tag{8}$$

münasibətləri ödənsin.

Qeyd edək ki, teorem 4 kəsilən Şredinqer operatoru üçün V.A. İlinin teoreminin analoqudur.

Qeyd 1. Teorem 4-ün şərtləri daxilində (7) və (8) bərabərsizliklərin ödənməsi, $\left\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *və* $\left\{\upsilon_k(x)\|\upsilon_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ sistemlərdən hər birinin $L_2^2(0,2\pi)$-də Riss bazisi olması üçün zəruri və kafidir.

Teorem 5 (Ekvivalent bazis haqqında). [5] *Tutaq ki, $1<p\le 2$, $p(x)$ və $q(x)$ funksiyaları $L_1(0,2\pi)$ sinifə daxildirlər, (6), (7), (8) şərtləri ödənilir və $\left\{u_k(x)\|u_k\|_p^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $L_p^2(0,2\pi)$ fəzasının hər hansı $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ bazisinə p- yaxındır. Onda $\left\{u_k(x)\|u_k\|_p^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ və $\left\{\upsilon_k(x)\|u_k\|_p\right\}_{k=1}^{\infty}$ sistemləri uyğun olaraq $L_p^2(0,2\pi)$ və $L_q^2(0,2\pi)$ -də bazis əmələ gətirirlər, bu sistemlər uyğun olaraq $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ bazisinə və onun biortoqonal qoşma sisteminə ekvivalentdirlər.*

Qeyd 2. *Əgər teorem 5-də $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ və $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemlərin rollarını dəyişsək, onda $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminin $L_p^2(0,2\pi)$, $p\ge 2$, fəzasında bazisliyini alarıq.*

Qeyd edək ki, kök funksiyaların bu cür ümumiləşmiş mənada başa düşməklə $L=-d^2/dx+q(x)$ operatorun kök funksiyalar

sistemin L_2-də şərtsiz bazisliyi (Riss bazisliyi) üçün zəruri və kafi şərt ilk dəfə V.A.İlinin tərəfindən alınmışdır və bu nəticələr kəsilən L operatoru özü tərəfindən üçün ümumiləşdirilib. Bu tədqiqatlar bir çox müəlliflərin (N.B.Kərimovun, V.D.Budayevin, İ.S.Lomovun, V.M.Qurbanovun və s.) yüksək tərtibli diferensial operatorların kök funksiyalar sistemlərin bazisliyi, şərtsiz bazisliyi və besselliyi xassələrinin tədqiqində başlanğıc nöqtə rolunu oynamışdır. V.M. Qurbanovun işində potensialı L_2-sinfindən olan Dirak operatoru üçün bessellik və şərtsiz bazislik meyarları alınmışdır. Dirak tipli operatorların kök vektor-funksiyalar sisteminin şərtsiz bazisliyinə V.M.Qurbanovun, E.C.İbadovun, A.İ.İsmaylovanın, G.R.Hacıyevanın, A.M.Abdullayevanın işləri həsr olunmuşdur.
Dirak operatorunun (sərhəd şərtli) kök vektor-funksiyaların bazislik xassələrinə və digər spektral xassələrinə aşağıdakı müəlliflərin işləri həsr olunmuşdur: V.V.Kornev, A.P.Xromov; T.Ş.Abdullayev, İ.M.Nəbiyev; P.Djakov, B.Mityagin; A.A.Lunyov, M.M.Malamud; X.R.Məmmədov, O.Akcay; Ya.V.Mykytnyk, D.V.Puyda və s.

1.4-də kəsilən Dirak operatorun kök vektor-funksiyalar üzrə $W_{p,2}^{1,m}$, $p \geq 1$, sinfindən olan vektor funksiyaların biortoqonal ayrılışının mütləq və müntəzəm yığılması haqqında teoremlər isbat olunur və $[0,2\pi]$ parçasında müntəzəm yığılma sürəti qiymətləndirilir.

Aşagıdakı xassələri ödəyən

$$W_{p,2}^{1,m}([0,2\pi]) \equiv W_{p,2}^{1,m}(\overline{G}) \equiv W_{p,2}^{1}\left(\overline{G}, \{\xi_i\}_{i=0}^{m}\right), \; p \geq 1,$$

ikikomponentli vektor-funksiyalar sinfini daxil edək: əgər $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in W_{p,2}^{1,m}(\overline{G})$, onda hər bir l, $l = \overline{1,m}$, üçün elə $f_l(x) = (f_{l1}(x), f_{l2}(x))^T$, $f_{lj}(x) \in W_p^1(G_l)$, $j = 1,2$, vektor-funksiya var ki, $\xi_{l-1} < x < \xi_l$ olduqda $f(x) = f_l(x)$; $f(\xi_i) = f(\xi_i + 0)$, $i = \overline{0, m-1}$, $f(\xi_m) = f(\xi_m - 0)$. Burada $W_p^1(G_l)$ adi Sobolev sinfidir; $W_{p,2}^{1,1}(\overline{G}) \equiv W_{p,2}^{1}(\overline{G})$ - $\overline{G} = [0,2\pi]$-də təyin olunmuş ikikomponentli vektor funksiyalar Sobolev sinfidir.

$f \in W_{p,2}^{1,m}\left(\overline{G}\right)$ elementinin normasını aşağıdakı bərabərliklə təyin edək:

$$\| f \|_{W_{p,2}^{1,m}\left(\overline{G}\right)} = \sum_{l=1}^{m} \| f_l \|_{W_{p,2}^{1}(G_l)} = \sum_{l=1}^{m} \left(\| f_l \|_p + \| f_l' \|_p \right).$$

Qeyd edək ki, $p(x), q(x) \in L_1(G_l)$, $l = \overline{1,m}$, olduqda $u_k(0+)$, $u_k(2\pi - 0)$, $u_k(\xi_l \pm 0)$, $l = \overline{1,m-1}$ birtərəfli limitləri mövcuddur. Bundan sonra $u_k(\xi_l)$, $l = \overline{0,m-1}$ və $u_k(2\pi)$ yazdıqda uyğun olaraq $u_k(\xi_l + 0), l = \overline{0,m-1}$ və $u_k(2\pi - 0)$ birtərəfli limitləri başa düşəcəyik.

Fərz edək ki, $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $L_2^2(0,2\pi)$-də tam və minimaldır. Onda $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə yeganə biortoqonal qoşma $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^2(0,2\pi)$ sistemi vardır. Tutaq ki, $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi L operatoruna formal qoşma $L^* = B\dfrac{d}{dx} + P^*(x)$ operatorunun məxsusi və qoşulmuş vektor-funksiyalardan ibarətdir, burada $P^*(x) = \overline{P(x)}$. Bu isə o deməkdir ki, $\upsilon_k(x)$ funksiyası G-də sanki hər yerdə $L^* \upsilon_k = \overline{\lambda_k} \upsilon_k + \theta_{k+1} \upsilon_{k+1}$ tənliyini ödəyir.

$f(x) \in W_{p,2}^{1,m}\left(\overline{G}\right)$ vektor-funksiya üçün $\alpha_k(f), k = 1,2,...$ ədədlərini təyin edək:

$$\overline{\alpha_k(f)} = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\langle B\upsilon_k(\xi_i - 0), f(\xi_i - 0) \rangle - \langle B\upsilon_k(\xi_i + 0), f(\xi_i + 0) \rangle \right] +$$
$$+ \langle B\upsilon_k(2\pi - 0), f(2\pi) \rangle - \langle B\upsilon_k(+0), f(0) \rangle$$

və $f(x)$ vektor-funksiyası üçün $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \, u_k(x)$, $\quad f_k = (f, \upsilon_k)$ biortoqonal sıranı tərtib edək.

Bu biortoqonal sıranın $\sigma_\nu(x,f)=\sum_{|\lambda_k|<\nu} f_k u_k(x)$ ν tərtibli xüsusi cəmini və $R_\nu(x,f)=f(x)-\sigma_\nu(x,f)$ şəklində qalığı daxil edək.

Bu paraqrafın əsas nəticələri aşağıdakı teoremdə cəmləşib.

Teorem 6. [9] Tutaq ki, $p(x), q(x)\in L_r(0,2\pi)$, $r>1$, $f(x)\in W_{p,2}^{1,m}(\overline{G})$ $p>1$, və $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *kök vektor-funksiyalar sistemi və* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *məxsusi qiymətləri üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:*

1) $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi* $L_2^2(0,2\pi)$*-də tam və minimaldır;*

2) ixtiyari $k=1,2,\ldots$ *üçün*

$$|\mathrm{Im}\lambda_k|\le const; \tag{9}$$

3) ixtiyari $\tau\in(-\infty,\infty)$ *üçün*

$$\sum_{|\mathrm{Re}\,\lambda_k-\tau|\le 1} 1 \le const \tag{10}$$

4) $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *biortoqonal sistemi* L^* *formal qoşma operatorun kök vektor funksiyalarından ibarətdir;*

5) elə C_0 *sabiti var ki,*

$$\|u_k\|_{2,2}\|\upsilon_k\|_{2,2}\le C_0, \quad k=1,2,\ldots . \tag{11}$$

Onda aşağıdakı təkliflər doğrudur:

a)
$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k||u_k(x)|,\ x\in\overline{G}=[0,2\pi] \tag{12}$$

sıranın müntəzəm yığılması üçün

$$\sum_{|\lambda_k|\ge 1}|\lambda_k|^{-1}|\alpha_k(f)|\,|u_k(x)| \tag{13}$$

sırasının $[0,2\pi]$*-də müntəzəm yığılması zəruri və kafidir.*

в)
$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k\, u_k(x) \tag{14}$$

biortoqonal ayrılışın $[0,2\pi]-$ *də müntəzəm yığılması üçün*

$$\sum_{|\lambda_k|\geq 1}\lambda_k^{-1}\alpha_k(f)u_n(x) \tag{15}$$

sıranın $[0,2\pi]$*-də müntəzəm yığılması zəruri və kafidir.*

c) əgər $k \geq k_0$ *olduqda* $\alpha_k(f)=0$ *(*k_0*- müəyyən qeyd olunmuş natural ədəddir) olarsa, onda* $f(x)$ *vektor-funksiyasının (14) biortoqonal sırası* $[0,2\pi]$*-də mütləq və müntəzəm yığılır və* $R_\nu(x,f)$ *qalığı üçün*

$$\sup_{x\in\overline{G}}|R_\nu(x,f)| \leq const\, \nu^{-\beta}\left\{\|f\|_{W^{1,m}_{p,2}(\overline{G})}+\|Pf\|_{r,2}\right\},$$

$$\nu \geq \max\left\{1,\left|\lambda_{k_0}\right|\right\}; \tag{16}$$

$$\sup_{x\in\overline{G}}|R_\nu(x,f)| = o\left(\nu^{-\beta}\right),\ \nu\to+\infty, \tag{17}$$

qiymətləndirmələri doğrudur, burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,$ $\beta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{q},\frac{1}{r'}\right\}$, *const* f *-dən asılı deyil, «o» simvolu isə* $f(x)$ *vektor-funksiyadan asılıdır.*

Bu paraqrafda Teorem 6-nın 1)-5) şərtləri ödəndikdə həmçinin aşağıdakı hallara da baxılmışdır: $r>1,\ p=1;\ r=1,\ p>1;$ $r=1,\ p=1$. Qeyd edək ki, adi Dirak operatoru üçün teorem 6-nın ((c) bəndinin) nəticələrinə oxşar nəticələr əvvəllər V.M.Qurbanov və A.İ.İsmaylovanın işində alınmışdır.

Dissertasiyanın **ikinci fəslində** kəsilən Dirak operatorun kök vektor-funksiyaları üzrə ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması öyrənilir.

Tərif 4. *Əgər ixtiyarı* $f(x)\in L_p^2(0,2\pi)$ *funksiyasına* $L_p^2(0,2\pi)$ *fəzasında* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L_p^2(0,2\pi)$ *sisteminin elementlərinin sonlu xətti kombinasiyası ilə ixtiyarı dəqiqliklə yaxınlaşmaq olarsa,* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ *sisteminə* $L_p^2(0,2\pi)$*- də qapalı sistem deyilir.*

Tərif 5. *Əgər* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(0,2\pi)$ *sisteminin heç bir elementi onun digər elementlərinin sonlu xətti kombinasiyalarının* $L_p^2(0,2\pi)$ *metrikasında limiti deyilsə,* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sisteminə* $L_p^2(0,2\pi)$*-də minimal sistem deyilir.*

Aşağıdakı A_p şərtlərini ödəyən $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə biortoqonal sıraya ayrılışları öyrənəcəyik:

1) Müəyyən qeyd olunmuş $p \ge 1$ üçün $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ vektor-funksiyalar sistemi $L_p^2(0,2\pi)$-də qapalı və minimaldır.

2) $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ məxsusi ədədlər sistemi üçün aşağıdakı bərabərsizliklər ödəyir:

$$|\mathrm{Im}\lambda_k| \le C_1, \qquad k = 1,2,... \tag{18}$$

$$\sum_{t\le|\lambda_k|\le t+1} 1 \le C_2, \qquad \forall t \ge 0. \tag{19}$$

A_p şərtlərindən birincisi $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə biortoqonal qoşma olan $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_q^2(0,2\pi)$ sistemin yeganəliyini təmin edir, yəni biortoqonallıq şərtləri ödənilir

$$(u_k, \upsilon_j) = \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{2} u_k^l(x)\overline{\upsilon_j^l(x)}\,dx = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \ne j \end{cases},$$

burada $u_k(x) = \left(u_k^1(x),\, u_k^2(x)\right)^T$, $\upsilon_k(x) = \left(\upsilon_k^1(x), \upsilon_k^2(x)\right)^T$.

A_p şərtlərindən ikincisi $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemin elementlərinin $|\lambda_k|$ kəmiyyətinin azalmaması sırası ilə nömrənlənməsinə imkan verir.

İxtiyari $f(x) \in L_p^2(0,2\pi)$ funksiyasının üçün $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi üzrə biortoqonal ayrılışının n-ci tərtib xüsusi cəmini tərtib edək:

$$\sigma_n(x,f) = \sum_{k=1}^{n} (f, \upsilon_k) u_k(x), \qquad x \in G. \tag{20}$$

Hər bir $j=1,2$ üçün (20) xüsusi cəminin

$$\sigma_n^j(x,f)=\sum_{k=1}^{n}(f,\upsilon_k)u_k^j(x), \quad x\in G, \tag{21}$$

j-ci komponentinə baxaq və (21) xüsusi cəmini $f(x)$ vektor-funksiyanın $f_j(x)$ - j-ci komponentinə uyğun triqonometrik Furye sırasının

$$S_\nu(x,f_j)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\nu(x-y)}{x-y}f_j(y)dy, \quad \nu=|\lambda_n|, \tag{22}$$

modifisə olunmuş xüsusi cəmi ilə müqayisə edək.

Tərif 6. *Əgər ixtiyari* $K\subset G=\bigcup_{l=1}^{m}G_l$ *kompaktında*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sigma_n^j(\cdot,f)-S_{|\lambda_n|}(\cdot,f_j)\right\|_{C(K)}=0$$

olarsa, $f(x)\in L_p^2(0,2\pi)$ *vektor-funksiyanın* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə biortoqonal ayrılışının j-ci komponenti* $f(x)$ *funksiyasının* $f_j(x)$*- j-ci komponentinin triqonometrik Furye sırası ilə ixtiyarı* $K\subset G$ *kompaktdında müntəzəm birgəyığılır.*

2.1 və 2.2-də triqonometrik Furye sıra ilə ixtiyari $K\subset G$ kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılma üçün zəruri şərt isbat edilmişdir.

Teorem 7. [7] *Tutaq ki,* $p(x)$ *və* $q(x)$ *funksiyaları* $L_1(0,2\pi)$ *sinifə daxildirlər və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi qeyd olunmuş* $p\geq 1$ *üçün* A_p *şərtlərini ödəyir. Onda ixtiyarı* $f(x)\in L_p^2(0,2\pi)$ *vektor-funksiyanın* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *sistemi üzrə biortoqonal ayrılışının j-ci komponentinin* $f(x)$ *funksiyasının* $f_j(x)$*- j-ci komponentinin triqonometrik Furye sırası ilə ixtiyarı* $K\subset G$ *kompaktdında müntəzəm birgəyığılması üçün zəruri şərt ixtiyari* $K_0\subset G$ *kompaktı üçün elə* $C(K_0)$ *sabitin varlığıdır ki, ixtiyarı k nömrəsi üçün*

$$\|u_k\|_{L_p^2(K_0)}\|\upsilon_k\|_{L_q^2(0,2\pi)}\leq C(K_0), \tag{23}$$

$q = \dfrac{p}{(p-1)}$ $(p = 1$ *olduqda* $q = \infty)$ *bərabərsizliyi təmin olunsun.*

2.3 paraqrafı $P(x) \equiv 0$ halında komponent üzrə müntəzəm birgəyığılma üçün zəruri və kafi şərtin isbatına həsr olunmuşdur.

2.4-də potensialı $L_p(0,2\pi) \otimes C^{2\times 2}$, $p > 2$, sinfindən olan kəsilən Dirak operatoru araşdırılır və kök vektor-funksiyalar sistemi üzrə ixtiyari $f(x) \in L_2^2(0,2\pi)$ vektor-funksiyasının biortoqonal ayrılışının triqonometrik sıra ilə kompaktda komponent üzrə birgəyığılması üçün zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.

Tutaq ki, baxılan $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi aşağıdakı B_2 şərtlərini ödəyir:

1) $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $L_2^2(0,2\pi)$-də tam və minimaldır.

2) $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ məxsusi ədədlər sistemi üçün (18) və (19) bərabərsizlikləri ödənir.

3) $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sisteminə biortoqonal qoşma $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2^2(0,2\pi)$ sistemi

$$L^* = B\frac{d}{dx} + \overline{P(x)}$$

formal qoşma operatorun kök vektor-funksiyalarından təşkil olunmuşdur, yəni $L^*\upsilon_k = \overline{\lambda_k}\upsilon_k + \theta_k\upsilon_{k+1}$.

Bu paraqraf üç altparaqrafa bölünüb. Bu paraqrafın əsas nəticəsi kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılma haqqında aşağıdakı teoremdir.

Teorem 8. [10] *Tutaq ki,* $P(x)$ *potensialı* $L_p(0,2\pi) \otimes C^{2\times 2}$, $p > 2$, *sinifinə daxildir və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *vektor-funksiyalar sistemi* B_2 *şərtlərini ödəyir. Onda ixtiyari* $K \subset G$ *kompaktda ixtiyari* $f(x) \in L_2^2(0,2\pi)$ *vektor-funksiyası üçün*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sigma_n^j(\cdot, f) - S_{|\lambda_n|}(\cdot, f_j) \right\|_{C(K)} = 0 \qquad (24)$$

bərabərliyinin ödənməsi üçün zəruru və kafi şərt ixtiyari $K_0 \subset G$ *kompaktı üçün elə* $C(K_0)$ *sabitinin varlığıdır ki, ixtiyarı k nömrəsi üçün*

$$\|u_k\|_{L_2^2(K_0)} \| \upsilon_k \|_{L_2^2(0,2\pi)} \le C(K_0) \qquad (25)$$

bərabərsizliyi təmin olunsun.

Bu teoremdən aşağıdakı lokalizasiya prinsipi alınır:

Teorem 9. Əgər L *operatorun potensialı* $P(x)$ *və* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *kök vektor-funksiyalar sistemi teorem 8-dəki tələbləri ödəyirsə, onda ixtiyari* $f(x) \in L_2^2(0,2\pi)$ *vektor-funksiyanın biortoqonal ayrılışı üçün* G*-də komponent üzrə lokalizasiya prinsipi doğrudur:* $x_0 \in G$ *nöqtəsində baxılan biortoqonal ayrılışın j-ci komponentin yığılması və ya dağılması* $f(x)$ *vektor funksiyasının yalnız uyğun* $f_j(x)$ *- j-ci komponentinin* x_0 *nöqtəsinin kiçik ətrafında özünü aparmasından asılıdır (və digər komponentin özünü aparmasından asılı deyil).*

Qeyd edək ki, əvvəllər teorem 8-in kafi hissəsi adi Dirak operatoru üçün V.M. Qurbanov və A.İ.İsmaylovanın işində isbat olunmuşdur. Sonda məsələlərin qoyuluşuna, dəyərli məsləhətlərinə və müntəzəm diqqətinə görə elmi rəhbərim professor V.M.Qurbanova öz dərin minnətdarlığımı bildirirəm.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyaları üzrə spektral ayrılışın mütləq və müntəzəm yığılmasının, komponent üzrə müntəzəm birgəyığılmasının, kök vektor-funksiyalar sisteminin bazisliyi məsələlərinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir.

İşdə aşağıdakı yeni nəticələr alınmışdır:

- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor funksiyalarının rissliyi üçün zəruri şərt alınmışdır.
- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sistemin $L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p \le 2$, fəzasında risslik meyarı alınmışdır.
- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sisteminin $L_2^2(0,2\pi)$ fəzasında şərtsiz bazisliyi üçün meyar alınmışdır.
- Kəsilən Dirak operatorunun kök vektor-funksiyalar sisteminin $L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p < \infty$, fəzasında ekvivalent bazisliyi haqqında teorem isbat olunmuşdur.
- $W_{p,2}^{1,m}(0,2\pi)$, $p \ge 1$, sinfindən olan funksiyaların ayrılışlarının mütləq və müntəzəm yığılması haqqında teorem isbat olunmuşdur.
- Kompaktda spektral ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması üçün zəruri, zəruri və kafi şərtlər isbat olunmuşdur.
- Potensiallı $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$, $p > 2$, sinifindən olan kəsilən Dirak operatoru üçün spektral ayrılışın adi triqonometrik sıra ilə kompaktda komponent üzrə müntəzəm birgəyığılması haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə çap olunmuşdur:

1. Buksayeva, L.Z. Necessary conditions of Riesz property of root vector-functions of Dirac discontinuous operator with summable coefficient // -Baku: Pros. of the IMM of ANAS, -2016. v.42, №1, -pp.106-115.
2. Буксаева, Л.З. Необходимые условия риссовости корневых вектор-функций разрывного Дирака с суммируемым коэффициентом // Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü il dönümünə həsr olunmuş “ Funksional analiz və onun tətbiqləri“ adlı respublika elmi konfransın materialları, - Bakı: -2016, -с.115-116
3. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. Риссовости корневых вектор-функций разрывного Дирака с суммируемым коэффициентом // Sumqayıt Dövlət Universitetinin yaradılmasının 55 illiyinə həsr olunmuş “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq elmi konfransın materialları”, Sumqayıt: - 2017, -s.80-81
4. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. Неравенство Рисса для разрывного оператора Дирака // Azərbaycanın Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 95-ci il dönümünə həsr olunmuş “Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri” adlı Respublika elmi konfransının materialları, -Baku: -17-18 may, -2018, -s.158-159
5. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. О неравенстве Рисса и базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака // -Москва: Дифференц. уравнения. -2019. т.55, №8, -с.1079-1089.
6. Буксаева, Л.З. Об эквивалентом базисе систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака // Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук, - Махачкала: -16-20 сентября, -2019, -с.45-46
7. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. Покомпонентная равносходимость для разрывного оператора Дирака // -Баку: Известия Педагогического Университета. - 2020. т.68, №3, -с.9-27

8. Буксаева, Л.З. О покомпонентная равномерной равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, отвечающий разрывным операторам Дирака // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения-XXII,
Воронеж: -3-9 мая, - 2021, -с.40-42
9. Буксаева, Л.З. Сходимость спектрального разложения корневых вектор-функцям разрывного оператора Дирака // -Баку: Известия Педагогического Университета, -2021. т.69, №3, -с.9-21
10. Kurbanov, V.M., Buksayeva, L.Z., Ismailova, A.I. Criteria for componentwise uniform equiconvergence with trigonometric series of spectral expansions responding to discontinuous Dirac operator // –Baku: Transactions of ANAS, series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, - 2021.v. 41, issue 4, -pp.114-136.

Dissertasiyanın müdafiəsi **«28» iyun 2024**-cü il tarixində saat **14^{00}-**da Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun nəzdində fəaliyyət göstərən ED 1.04 Dissertasiya şurasının iclasında keçiriləcək.

Ünvan: AZ 1141, Bakı şəhəri, B.Vahabzadə küçəsi, 9.

Dissertasiya işi ilə Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun kitabxanasında tanış olmaq olar.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyasıyaları Riyaziyyat və Mexanika İnstitutunun rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **24 may 2024**-cü il tarixdə zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 03.05.2024
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcmi: 39936
Tiraj: 50