АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ РАЗРЫВНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Специальность: 1211.01 – Дифференциальные уравнения

Отрасль науки: Математика

Соискатель: **Лейла Закировна Буксаева**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора философии

Баку – 2024

Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Вали Магеррам оглы Курбанов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Назим Бахыш оглы Керимов

доктор математических наук, профессор
Яшар Топуш оглы Мегралиев

кандидат физико-математических наук, доцент
Эльвин Ибрагим оглы Азизбеков

Диссертационный совет ED 1.04 Высшей Аттестационной Комиссии при Президенте Азербайджанской Республики, действующий на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики

Председатель диссертационного совета:

член–корреспондент НАН Азербайджана,
доктор физико-математических наук, профессор

________________ **Мисир Джумаил оглы Марданов**

Ученый секретарь диссертационного совета:

кандидат физико-математических наук

________________ **Абдуррагим Фарман оглы Гулиев**

Председатель научного семинара:

доктор физико-математических наук, профессор

________________ **Низамеддин Ширин оглы Искендеров**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень разработки. В последнее столетие в связи с развитием квантовой механики особое развитие получила спектральная теория дифференциальных операторов.

Наиболее значимыми исследованиями спектральной теории являются: исследование спектра, базисность систем корневых функций данного оператора в различных пространствах функций; равносходимость спектрального разложения функции по системе корневых функций изучаемого оператора с разложением этой же функции в тригонометрический ряд Фурье; абсолютная и равномерная сходимость спектрального разложения функций из класса, не совпадающего с областью определения изучаемого оператора и т.д.

Начало исследований спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов начинается с классических работ Ж.Лиувилля, Ш.Штурма, дальнейший вклад в развитие теории внесли В.А.Стеклов, Я.Д.Тамаркин, Д.Биркгоф, М.Л.Расулов и другие.

При исследовании несамосопряженных задач было выяснено, что система собственных функций несамосопряженного оператора может не образовать базис в L_2 и даже может быть не полной в L_2. Вследствие чего данная система должна быть пополнена присоединенными функциями. В задачах данного вида собственные и присоединенные функции не ортогональны в L_2, ни их замкнутость, ни их минимальность не обеспечивает ее базисность. Следовательно, изучение несамосопряженных задач вызвало необходимость к новым методам для их исследования.

Факт полноты специально построенной системы корневых функций в L_2 (каноническая система по М.В. Келдышу) для широкого класса краевых задач впервые был доказан М.В.Келдышем. В дальнейшем этот вопрос исследовался в работах В.Б.Лидского, М.А.Наймарка, В.Н.Визитея и А.С.Маркуса, Дж.Э.Аллахвердиева, М.Г.Гасымова и М.Г.Джавадов, А.М.Кралла, А.А.Шкаликова и других авторов.

Базисность Рисса систем корневых функций в L_2 усиленно регулярных краевых задач доказана В.П. Михайловым и Г.М.Кесельманом. А базисность со скобками систем корневых функций дифференциального оператора с регулярными краевыми условиями установлена А.А.Шкаликовым.

Одним из наиболее общих результатов о равносходимости для обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями и достаточно гладкими коэффициентами получил Я.Д.Тамаркин. В случае для оператора с суммируемыми коэффициентами аналогичные результаты доказаны М.Стоуном.

В основе исследований выше перечисленных работ лежит резольвентный метод, а полученные равносходимости являются равносходимостями со скобками.

С 80-х годов прошлого столетия применяется новый метод, предложенный В.А.Ильиным метод изучения дифференциальных операторов. Им было выявлено, что при наличии бесконечного числа кратных собственных значений свойства базисности и равносходимости в отличие от свойства полноты 1) существенно зависит от выбора корневых функций; 2) не определяется только конкретным видом краевых условий, на эти свойства влияют также значения коэффициентов дифференциального оператора, причем эти свойства изменяются при каком угодно малом изменении значений коэффициентов в метрике тех классов, в которых заданы эти коэффициенты. Таким образом, в этой ситуации нельзя сформулировать условия базисности и равносходимости в терминах краевых условий.

При определенных естественных условиях В.А.

Ильиным[1] были доказаны теоремы о равносходимости и базисности для системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора.

В дальнейшее исследования продолжались самим В.А.Ильиным и его последователями В.В.Тихомировым, И.С.Ломовым, Н.Б.Керимовым, В.Д.Будаевым, И.Йо, В.И.Коморником, Л.В.Крицковым, В.М.Курбановым и других.

Вопросы безусловной базисности систем корневых функций оператора Дирака изучены в работах В.М.Курбанова, В.М.Курбанова[2] и А.М. Абдуллаевой. В этих работах установлены критерии бесселевости и безусловной базисности в L_2 систем корневых вектор функций оператора Дирака.

В работах А.И. Исмайловой, В.М. Курбанова и А.И. Исмайловой изучены вопросы покомпонентной равномерной равносходимости на компакте, равномерной сходимости, риссевости систем корневых вектор-функций оператора Дирака.

Вопросы базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака с конкретными краевыми условиями изучались в работах П.Джакова и Б.Митягина, И.Трошина и М.Ямомоты, Л.Л.Оридороги и С.Хасси.

Оператор Дирака с потенциалом из L_p, $p \geq 1$, исследован в работах А.М. Савчука, А.А. Шкаликова и А.М. Савчука, И.В. Садовничей и для случая сильно регулярных краевых условий была доказана базисность Рисса, а в случае регулярных (но не сильно регулярных) краевых условий базисность Рисса из подпространств. В работах А.А. Лунева, М.М. Маламуда исследована 2×2 система типа Дирака с потенциалами из класса L_1 и сильно регулярным краевыми условиями и установлена базисность Рисса.

---

[1] Ильин, В.А. Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений I //-Москва: Дифференциальные уравнения, -1980. т.16, №5, -с.771-794

[2] Kurbanov, V.M., Abdullaeva, A.M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient // -Zagreb: Operators and Matrics., -2018. v.12, №4, -pp.943-954

Исходя из вышесказанного представляет интерес дальнейшее исследование методом В.А.Ильина дифференциальных операторов и в том числе операторов типа Дирака.

Объект и предмет исследования. Основным объектом диссертационной работы является разрывный оператор Дирака. Предметом исследования является изучение вопросов базисности, покомпонентной равномерной равносходимости и абсолютной и равномерной сходимости спектрального разложения по корневым вектор-функциям разрывного оператора Дирака.

Цель и задачи исследования.

Исследовать риссовость, безусловную базисность в $L_2^2(0,2\pi)$ (базисность Рисса) для систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака. Доказать теорему об эквивалентной базисности в $L_p^2(0,2\pi)$, $1<p<\infty$. Изучить вопросы абсолютной и равномерной сходимости биортогонального разложениям по корневым вектор-функциям данного оператора. Доказать необходимое и достаточное условие для равномерной сходимости биортогонального разложения вектор-функции из класса $W_{p,2}^{1,m}$, $p\geq 1$, и оценить скорость равномерной сходимости. Исследовать покомпонентную равномерную равносходимость спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте. Доказать необходимое условие для покомпонентной равносходимости на компакте установить необходимое и достаточное условие для покомпонентной равномерной равносходимости.

Методы исследования.

В работе применяются методы спектральной теории дифференциальных операторов, функционального и гармонического анализа.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака.

- Необходимые и достаточные условия безусловной базисности систем собственных и присоединенных вектор-функций разрывного оператора Дирака в $L_2^2(0,2\pi)$.
- Теорема об эквивалентной базисности систем собственных и присоединенных вектор-функций разрывного оператора Дирака в $L_p^2(0,2\pi)$, $1<p<\infty$.
- Теорема об абсолютной и равномерной сходимости спектральных разложений функций из класса $W_{p,2}^{1,m}(0,2\pi)$, $p\ge 1$.
- Необходимое условие для покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте.
- Необходимое и достаточное условие для покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте в случае нулевого потенциала.
- Теорема о покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте для разрывного оператора Дирака с потенциалом $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$, $p>2$.

Научная новизна исследования. В диссертации получены следующие результаты:

- Установлено необходимое условие риссовости для корневых вектор – функций разрывного оператора Дирака.
- Установлен критерий риссовости систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака в $L_p^2(0,2\pi)$, $1<p\le 2$.
- Установлен критерий безусловной базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака в $L_2^2(0,2\pi)$
- Доказана теорема об эквивалентной базисности систем корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций разрывного оператора Дирака в $L_p^2(0,2\pi)$, $1<p<\infty$.

- Доказана теорема об абсолютной и равномерной сходимости спектральных разложений функций из класса $W_{p,2}^{1,m}(0,2\pi), \quad p \geq 1.$
- Доказано необходимое, необходимое и достаточное условия для покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте.
- Доказана теорема о покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте для разрывного оператора Дирака с потенциалом $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2},\ p>2$.

Теоретическая и практическая ценность исследования. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов, при обосновании методом Фурье решения задач математической физики, теории аппроксимации функции.

Апробация и применение. Основные результаты диссертации докладывались: На Республиканской научной конференции, посвященной 100–летию профессора А.Ш.Габиб-заде «Функциональный анализ и его применения» (Баку, 2016); на Международной научной конференции, посвященной 55-летию Сумгаитского Государственного Университета «Теоретические и прикладные проблемы математики» (Сумгаит, 2017); на Республиканской научной конференции, посвященной 95 – летию общенационального лидера Гейдара Алиева “Актуальные проблемы Математики и Механики” (Баку, 2018); Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компютерных наук, (Махачкала,2019); Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения-XXII, (Воронеж, 2021); на семинаре кафедры «Математический анализ» (д.м.н., проф. Б.А.Алиев) Азербайджанского Государственного Педагогического Университета; на семинаре кафедры «Уравнения математической физики» (академик Ю.А.Мамедов) Бакинского Государственного Университета.

Личный вклад автора. Все выводы и полученные результаты принадлежат лично автору.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Диссертационная работа выполнена на кафедре «Математический анализ» Азербайджанского Государственного Педагогического Университета.

Структура и объем диссертации (в знаках, с указанием объема каждого структурного подразделения в отдельности). Общий обьем диссертационной работы - 202629 знаков (титульная страница- 364 знаков, содержание 1656 знаков, введение - 46609 знаков, первая глава - 86000 знаков, вторая глава-66000 знаков, заключение-2000). Список используемой литературы состоит из 107 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации рассматривается разрывный оператор Дирака на конечном интервале с суммируемым комплекснозначным потенциалом.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Каждая из глав разбита на параграфы.

Первая глава диссертации посвящена исследованию вопросов риссевости, базисности, абсолютной и равномерной сходимости.

Пусть точки $\{\xi_i\}_{i=0}^{m}$, $a=\xi_0<\xi_1<...<\xi_m=b$ осуществляют разбиение интервала $G=(a,b)$. Обозначим $G_l=(\xi_{l-1},\xi_l),\ l=\overline{1,m}$. Через A_l обозначим класс абсолютно непрерывных двухкомпонентных вектор-функций на $\overline{G_l}$. Определим класс

$A(a,b)$ следующим образом: если $f(x)\in A(a,b)$, то для каждого $l=\overline{1,m}$ существует вектор-функция $f_l(x)\in A_l$ такая, что $f(x)=f_l(x)$ при $\xi_{l-1}<x<\xi_l$.

Пусть $L_p^2(G)$, $p\geq 1$, пространство двухкомпонентных вектор-функций $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T$, с нормой

$$\|f\|_p\equiv\|f\|_{p,2}\equiv\|f\|_{p,2,G}=\left(\int_G|f(x)|^p dx\right)^{1/p}=\left\{\int_G\left(\sum_{j=1}^{2}|f_j(x)|^2\right)^{p/2}dx\right\}^{1/p}$$

В случае $p=\infty$ норма определяется равенством

$$\|f\|_\infty\equiv\|f\|_{\infty,2}=\sup_{x\in\overline{G}}vrai|f(x)|.$$

Ясно, что для произвольных вектор - функций $f(x)=L_p^2(G)$, $g(x)=L_q^2(G)$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$, $1\leq p\leq\infty$, определено $(f,g)=\int_G\langle f(x),g(x)\rangle\,dx,$

где
$$\langle f(x),g(x)\rangle=\sum_{i=1}^{2}f_1(x)\overline{g_i(x)}.$$

$L_p(G)\otimes C^{2\times 2}$, $1\leq p\leq\infty$, - пространство матрица – функций размерности 2×2, элементы которых принадлежат пространству $L_p(G)$.

Рассмотрим оператор Дирака

$$Ly=B\frac{dy}{dx}+P(x)y,\ x\in\bigcup_{\ell=1}^{m}G_\ell$$

где $B=(b_{ij})_{ij=1}^2, b_{i,3-i}=(-1)^{i-1}, b_{ii}=0,\ y(x)=(y_1(x),y_2(x))^T$,

$P(x)=diag\,(p(x),q(x))$, причём $p(x)$ и $q(x)$ комплекснозначные суммируемые на G функции.

Следуя В.А.Ильину, будем понимать корневые вектор-функции оператора L безотносительно к виду краевых условий и условий «сшивания», а именно: под собственной вектор-функцией оператора L, отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую тождественно не равную нулю комплекснозначную вектор-функцию $\overset{0}{y}(x)\in A(a.b)$ удовлетворяющую почти всюду в G

уравнению $\overset{0}{L} y=\lambda \overset{0}{y}$. Аналогично, под присоединённой вектор-функций порядка $r, r \geq 1$, отвечающей тому же λ и собственной вектор-функции $\overset{0}{y}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную вектор-функцию $\overset{r}{y}(x) \in A(a,b)$ удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $L \overset{r}{y}=\lambda \overset{r}{y}+\overset{r-1}{y}$.

Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - произвольная система, составленная из корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций оператора L, $\{\lambda_k\}_{k=\infty}^{\infty}$ - соответствующая ей система собственных значений. Кроме того, каждая вектор-функция $u_k(x)$ входит в систему $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ вместе со всеми соответствующими ей присоединенными функциями меньшего порядка. Это означает, что каждый элемент $u_k(x)$ системы $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ почти всюду в G удовлетворяет либо уравнению

$$Lu_k=\lambda_k u_k \tag{1}$$

(в этом случае $u_k(x)$ - собственная вектор-функция), либо уравнению

$$Lu_k=\lambda_k u_k+u_{\nu(k)}, \tag{2}$$

где номер $\nu(k)$ однозначно определяется номером k и $\nu(k_1)\neq\nu(k_2)$ при $k_1\neq k_2$ (в этом случае $\lambda_k=\lambda_{\nu(k)}, u_k(x)$ - присоединенная вектор-функция порядка $r\geq 1$, $u_{\nu(k)}(x)$ - присоединенная вектор-функция порядка $r-1$). В случае, когда длины цепочек присоединенных функций ограничены, в равенстве (2) следует взять $\nu(k)=k-1, u_{\nu(k)}=\theta_k u_{k-1}$. При этом θ_k равно либо 0 (в этом случае $u_k(x)$ - собственная вектор-функция), либо 1 (в этом случае $u_k(x)$ присоединенная функция $\lambda_{k-1}=\lambda_k$).

В 1.1 приводятся некоторые понятия и основные факты из теории базисов.

Определение 1. *Система* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\subset L_q^2(0,2\pi)$ *называется риссовой (или удовлетворяет неравенству Рисса), если* *существует постоянная* $M(p)$ *такая, что для произвольной* $f(x)\in L_p^2(0,2\pi), 1<p\le 2,$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\varphi_k\right)\right|^q \le M\left\|f\right\|_p^q, \qquad \text{где } p^{-1}+q^{-1}=1.$$

Отметим, что при $p=q=2$ *система* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\subset L_2^2(0,2\pi)$ *становится бесселевой.*

Определение 2. *Система* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\subset L_p^2(0,2\pi), p\ge 1,$ *называется* p *близким в* $L_p(0,2\pi)$ *к системе* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}\subset L_p^2(0,2\pi)$, *если выполняется*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\varphi_k-\psi_k\right\|_p^p<\infty.$$

Определение 3. *Две последовательности элементов в банаховом пространстве X называется эквивалентными, если существует линейный ограниченный и ограниченно обратимый в X оператор переводящий одну из этих последовательностей в другую.*

В 1.2 устанавливаются необходимые условия риссовости систем корневых вектор-функций оператора L.

Теорема 1. [1] *Пусть функции* $p(x)$ *и* $q(x)$ *принадлежит классу* $L_p(G), \ 1<p\le 2$, *длины цепочек корневых вектор – функций ограничены.*
Тогда, для того чтобы система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\varphi_k(x)=u_k(x)\left\|u_k\right\|_{q,2}^{-1}$, *удовлетворяла неравенству Рисса, необходимо*

$$\sum_{|Re\,\lambda_k-\nu|\le 1}\frac{\left|u_k(x)\right|^q}{\left\|u_k\right\|_{q,2}^q}\le K_1\left(1+\sup_{|Re\,\lambda_k-\nu|\le 1}\left|Im\,\lambda_k\right|\right), \quad x\in\overline{G} \tag{3}$$

где ν *произвольное действительное число;* K_1 *постоянная не зависящая от* ν; $u_k(a)=u_k(a+0),\ u_k(b)=u_k(b-0);\ u_k(\xi_i)$ *равно любому одному из значений* $u_k(\xi_i-0), u_k(\xi_i+0),\ i=\overline{1,m-1};$ *суммирование ведётся только по собственным вектор-функциям.*

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы 1 и длины цепочек корневых вектор - функций равномерно* *ограниченны. Тогда для риссовости системы* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\varphi_k(x) = u_k(x)\|u_k\|_{q,2}^{-1}$, *необходимо*

$$\sum_{|Re\,\lambda_k - \nu| \le 1} 1 \le K_2\left(1 + \sup_{|Re\,\lambda_k - \nu| \le 1} |Im\,\lambda_k|\right) \tag{4}$$

где K_2 *постоянная не зависящая от* ν, *а суммирование ведётся с учетом кратности числа* λ_k.

Теорема 2. [1] *Пусть функции* $p(x)$ *и* $q(x)$ *принадлежат классу* $L_p(G)$, $1 < p \le 2$, *и пусть выполняется антиаприорная оценка*

$$\|u_{\nu(k)}\|_{q,2,G_l} \le C_0\left(1 + |Im\,\lambda_k|\right)^{1/p}\|u_k\|_{q,2,G_l} \tag{5}$$

где C_0 *не зависит от порядка присоединенных функций* $l = \overline{1,m}$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Тогда для риссовости системы* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\varphi_k(x) = u_k(x)\|u_k\|_{q,2}^{-1}$ *необходимо выполнение неравенство (3), где суммирование ведут по всем корневым вектор-функциям.*

В 1.3 диссертации рассматриваем разрывный оператор Дирака на интервале $(0,2\pi)$. Устанавливаем критерии риссовости, безусловной базисности в $L_2^2(0,2\pi)$ для системы корневых вектор - функций и доказываем теорему об эквивалентной базисности в $L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p < \infty$. Этот параграф разбит на два подпараграфа.

Основным результатом 1.3.1 является следующая теорема

Теорема 3 (Критерий риссовости). [5] *Пусть функции* $p(x)$ *и* $q(x)$ *принадлежат классу* $L_1(0,2\pi)$, *длина цепочек корневых вектор - функций равномерно ограничены и существует постоянная* C_0 *такая, что*

$$|Im\,\lambda_k| \le C_0, \quad k = 1,2,... \tag{6}$$

Тогда для риссовости системы $\left\{u_k(x)\|u_k\|_q^{-1}\right\} \subset L_q^2(0,2\pi)$ *необходимо и достаточно существование константы* M_1 *такой, что*

$$\sum_{|Re\lambda_k-\tau|\le 1} 1 \le M_1, \qquad (7)$$

где τ - произвольное действительное число.

Отметим, что для оператора Дирака при $P(x)\in L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$, $1<p\le 2$, критерий риссовости ранее установлен в работах В.М.Курбанова и А.И Исмайловой.

Пусть L^* формально сопряженный оператор к $L: L^* = Bd/dx + P^*(x)$, где $P^*(x)$ - сопряженная матриц – функция к $P(x)$. Обозначим через $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ биортогонально сопряженную к $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ систему и предположим, что она состоит из корневых вектор – функций оператора L^*.

Главными результатами 1.3.2 являются теоремы о безусловной базисности и эквивалентной базисности

Теорема 4 (о безусловной базисности). [5] *Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ принадлежат классу $L_1(0,2\pi)$, одна из систем $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2^2(0,2\pi)$, длина цепочек корневых вектор - функций равномерно ограничены и выполняется условие (6). Тогда необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2^2(0,2\pi)$ каждой из этих систем является существование постоянных M_1 и M_2, обеспечивающих справедливость неравенства (7) и*

$$\|u_k\|_2\|\upsilon_k\|_2 \le M_2, \ \ k=1,2,... \qquad (8)$$

Отметим, что теорема 4 является аналогом теоремы В.А. Ильина для разрывного оператора Шредингера.

Замечание 1. *При условиях теоремы 4 выполнение неравенств (7) и (8) является необходимым и достаточным условием для базисности Рисса каждой из систем $\left\{u_k(x)\|u_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{\upsilon_k(x)\|\upsilon_k\|_2^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^2(0,2\pi)$.*

Теорема 5 (об эквивалентной базисности). [5] *Пусть $1<p\le 2$, функции $p(x)$ и $q(x)$ принадлежат классу $L_1(0,2\pi)$, выполняются условия (6), (7), (8) и система $\left\{u_k(x)\|u_k\|_p^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ p- близка к некоторому базису $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$* в *$L_p^2(0,2\pi)$. Тогда*

системы $\left\{u_k(x)\|u_k\|_p^{-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\left\{\upsilon_k(x)\,\|u_k\|_p\right\}_{k=1}^{\infty}$ *являются базисами в* $L_p^2(0,2\pi)$ *и* $L_q^2(0,2\pi)$ *соответственно, причем эти системы эквивалентны соответственно базису* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и его биортогонально сопряженной системе.*

Замечание 2. *Если в теореме 5 поменять ролями системы* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$*, то получим базисность системы* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *в* $L_p^2(0,2\pi)$ *при* $p \geq 2$.

Отметим, что в таком обобщенном понимании корневых функций впервые В.А. Ильиным установлены необходимые и достаточные условия безусловной базисности (базисности Рисса) в L_2 систем корневых функций оператора $L = -d^2/dx + q(x)$ и эти же результаты перенесены в случай разрывного оператора L. Эти исследования послужили отправной точкой для работ многих авторов по исследованию свойств бесселевости, безусловной базисности и базисности систем корневых функций дифференциальных операторов высокого порядка (Н.Б.Керимовым, В.Д.Будаевым, И.С.Ломовым, И.Йо, В.М.Курбановым и других). Для оператора Дирака с потенциалом из класса L_2 критерий бесселевости и безусловной базисности установлен В.М.Курбановым. Вопросам безусловной базисности систем корневых вектор – функций операторов типа Дирака посвящены работы В.М.Курбанова, Э.Д.Ибадова, А.И.Исмайловой, Г.Р.Гаджиевой, А.М. Абдуллаевой. Свойствам базисности и другим спектральным свойствам корневых вектор-функций оператора Дирака (с краевыми условиями) посвящены работы авторов: В.В.Корнев, А.П. Хромов; T. Sh. Abdullaev, I.M. Nabiev; P.Djakov, B.Mityagin; A.A.Lunyov, M.M. Malamud; Kh.R. Mamedov, O.Akcay; Ya. V.Mykytnyk, D.V. Puyda и других.

В 1.4 доказываются теоремы об абсолютной и равномерной сходимости биортогонального разложения вектор-функции из класса $W_{p,2}^{1,m}$, $p \geq 1$, по корневым вектор –

функциям разрывного оператора Дирака и оценена скорость равномерной сходимости на $[0,2\pi]$.

Введем $W^{1,m}_{p,2}([0,2\pi]) \equiv W^{1,m}_{p,2}(\overline{G}) \equiv W^{1}_{p,2}(\overline{G},\{\xi_i\}^m_{i=0})$, $p \geq 1,$ - класс двухкомпонентных вектор-функций удовлетворяющих следующим свойствам: если $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in W^{1,m}_{p,2}(\overline{G})$, то для каждого l, $l = \overline{1,m}$, существует вектор-функция $f_l(x) = (f_{l1}(x), f_{l2}(x))^T$, $f_{lj}(x) \in W^1_p(G_l)$, $j = 1,2$, что $f(x) = f_l(x)$ при $\xi_{l-1} < x < \xi_l$; $f(\xi_i) = f(\xi_i + 0)$, $i = \overline{0,m-1}$, $f(\xi_m) = f(\xi_m - 0)$. При этом $W^1_p(G_l)$ является обычным классом Соболева, $W^{1,1}_{p,2}(\overline{G}) \equiv W^1_{p,2}(\overline{G})$ - класс Соболева двухкомпонентных вектор-функций определенных на $\overline{G} = [0,2\pi]$. Норму элемента $f \in W^{1,m}_{p,2}(\overline{G})$ определим равенством

$$\| f \|_{W^{1,m}_{p,2}(\overline{G})} = \sum_{l=1}^{m} \| f_l \|_{W^1_{p,2}(G_l)} = \sum_{l=1}^{m} \left(\| f_l \|_p + \| f_l' \|_p \right).$$

Отметим, что при $p(x), q(x) \in L_1(G_l)$, $l = \overline{1,m}$, существуют односторонние пределы $u_k(0+)$, $u_k(2\pi - 0)$, $u_k(\xi_l \pm 0)$, $l = \overline{1,m-1}$. В дальнейшем под $u_k(\xi_l)$, $l = \overline{0,m-1}$, и $u_k(2\pi)$ будем понимать соответственно односторонние пределы $u_k(\xi_l + 0)$, $l = \overline{0,m-1}$, и $u_k(2\pi - 0)$.

Предположим, что система $\{u_k(x)\}^\infty_{k=1}$ полна и минимальна в $L^2_2(0,2\pi)$. Тогда существует единственная система $\{\upsilon_k(x)\}^\infty_{k=1} \subset L^2_2(0,2\pi)$ биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}^\infty_{k=1}$. Пусть система $\{\upsilon_k(x)\}^\infty_{k=1}$ состоит из собственных и присоединенных вектор-функций формально сопряженных к L оператора $L^* = B\dfrac{d}{dx} + P^*(x)$, где $P^*(x) = \overline{P(x)}$ сопряженная матрица–функция к $P(x)$. Это означает, что функция $\upsilon_k(x)$ удовлетворяют почти всюду в G уравнению $L^*\upsilon_k = \overline{\lambda_k}\upsilon_k + \theta_{k+1}\upsilon_{k+1}$.

Для вектор - функции $f(x) \in W^{1,m}_{p,2}(\overline{G})$ определим числа $\alpha_k(f)$, $k = 1,2,...:$

$$\overline{\alpha_k(f)} = \sum_{i=1}^{m-1}\left[\langle B\upsilon_k(\xi_i - 0), f(\xi_i - 0)\rangle - \langle B\upsilon_k(\xi_i + 0), f(\xi_i + 0)\rangle\right] + \\ + \langle B\upsilon_k(2\pi - 0), f(2\pi)\rangle - \langle B\upsilon_k(+0), f(0)\rangle$$

и составим биортогональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x), \quad f_k = (f, \upsilon_k)$, вектор-функции $f(x)$ и введем частичную сумму порядка ν этого биортогонального ряда $\sigma_\nu(x,f) = \sum_{|\lambda_k|<\nu} f_k u_k(x)$ и остаток в виде $R_\nu(x,f) = f(x) - \sigma_\nu(x,f)$.

Основные результаты данного параграфа сосредеточены в следующей теореме.

Теорема 6. [9] *Пусть* $p(x), q(x) \in L_r(0,2\pi), r > 1,$ $f(x) \in W_{p,2}^{1,m}(\overline{G}),\ p > 1,$ *и для систем корневых вектор-функций* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *и собственных значений* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *выполняются условия:*

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *полна и минимальна* $L_2^2(0,2\pi)$;

2) для любого $k = 1,2,\ldots \quad |Im\lambda_k| \le const$; (9)

3) для любого $\tau \in (-\infty, \infty) \quad \sum_{|Re\lambda_k - \tau| \le 1} 1 \le const$ (10)

4) биортогональная система $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *состоит из корневых вектор функций формально сопряженного оператора* L^*;

5) существует константа C_0*, такая что*

$$\|u_k\|_{2,2} \|\upsilon_k\|_{2,2} \le C_0, \quad k = 1,2,\ldots . \tag{11}$$

Тогда справедливы утверждения:

а) для равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| |u_k(x)|, \qquad x \in \overline{G} = [0,2\pi] \tag{12}$$

необходимо и достаточно равномерная на $[0,2\pi]$ *сходимость ряда*

$$\sum_{|\lambda_k| \ge 1} |\lambda_k|^{-1} |\alpha_k(f)|\, |u_k(x)|; \tag{13}$$

в) для равномерной сходимости на $[0,2\pi]$ *биортогонального разложения*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x) \tag{14}$$

необходимо и достаточно равномерная на $[0,2\pi]$ *сходимость ряда*

$$\sum_{|\lambda_k|\geq 1} \lambda_k^{-1} \alpha_k(f) u_n(x); \tag{15}$$

c) если $\alpha_k(f)=0$ *при* $k \geq k_0$ *(*k_0*- некоторое фиксированное натуральное число), то биортогональный ряд (14) вектор-функции* $f(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* $[0,2\pi]$ *и для остатка* $R_\nu(x,f)$ *выполняются оценки*

$$\sup_{x\in\bar{G}} |R_\nu(x,f)| \leq const\, \nu^{-\beta} \left\{ \|f\|_{W^{1,m}_{p,2}(\bar{G})} + \|Pf\|_{r,2} \right\},\ \text{при}\ \nu \geq \max\{1, |\lambda_{k_0}|\}; \tag{16}$$

$$\sup_{x\in\bar{G}} |R_\nu(x,f)| = o(\nu^{-\beta}),\ \nu \to +\infty, \tag{17}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1,\ \beta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{q},\frac{1}{r'}\right\}$, $const$ *не зависит от* f *, а символ «о» зависит от вектора – функции* $f(x)$.

В этом параграфе при выполнении условий 1)-5) теоремы 6 также рассмотрены случаи $r>1,\ p=1;\ r=1,\ p>1;$ Отметим что, результаты, подобные результатам теоремы 6 (пункт с)) для обычного оператора Дирака получены ранее в работе В.М. Курбанова и А.И. Исмайловой.

Во второй главе диссертации изучается покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневым вектор функциям разрывного оператора Дирака с обычным тригонометрическим рядом на компакте.

Определение 4. *Система вектор-функций* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(0,2\pi)$ *называется замкнутой в* $L_p^2(0,2\pi)$*, если любую вектор-функцию* $f(x) \in L_p^2(0,2\pi)$ *можно приблизить в метрике* $L_p^2(0,2\pi)$ *с любой степенью точности конечной линейной комбинацией элементов системы* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 5. *Система вектор-функций* $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^2(0,2\pi)$ *называется минимальной в* $L_p^2(0,2\pi)$*, если ни* *один элемент этой системы не является пределом в метрике* $L_p^2(0,2\pi)$ *конечных линейных комбинаций остальных элементов этой системы.*

Будем изучать разложения в биортогональный ряд по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям A_p:

1) при некотором фиксированном $p \geq 1$ система вектор-функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L_p^2(0,2\pi)$.

2) система собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет двум неравенствам:

$$|Im\lambda_k| \leq C_1, \qquad k = 1,2,... \tag{18}$$

$$\sum_{t \leq |\lambda_k| \leq t+1} 1 \leq C_2, \qquad \forall t \geq 0 \tag{19}$$

Первое из двух условий A_p гарантирует единственность системы $\{\upsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_q^2(0,2\pi)$, биортогонально сопряженной с системой $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, т.е выполняются условия биортогональности

$$(u_k, \upsilon_j) = \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{2} u_k^l(x) \overline{\upsilon_j^l(x)}\, dx = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases},$$

где $u_k(x) = \left(u_k^1(x), u_k^2(x)\right)^T$, $\upsilon_k(x) = \left(\upsilon_k^1(x), \upsilon_k^2(x)\right)^T$.

Второе из условий A_p позволяет считать все элементы системы $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ занумерованны в порядке неубывания величины $|\lambda_k|$.

Для произвольной $f(x) \in L_p^2(0,2\pi)$ составим частичную сумму порядка *n* биортогонального разложения по системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\sigma_n(x,f) = \sum_{k=1}^{n} (f, \upsilon_k) u_k(x), \quad x \in G. \tag{20}$$

Для каждого *j=1,2* рассмотрим *j-ю* компоненту частичной суммы (20)

$$\sigma_n^j(x,f) = \sum_{k=1}^{n} (f, \upsilon_k) u_k^j(x), \quad x \in G, \tag{21}$$

и сравним (21) с модифицированной частичной суммой тригонометрического ряда Фурье соответствующей *j-й* компоненты $f_j(x)$ вектор - функции $f(x)$

$$S_\nu(x, f_j) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{sin\nu(x-y)}{x-y}f_j(y)dy\,, \qquad \nu = |\lambda_n| \tag{22}$$

Определение 6. *Будем говорить, что j-я компонента разложения вектор-функции* $f(x)\in L_p^2(0,2\pi)$ *в биортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *равносходится равномерно на любом компакте множества* $G = \bigcup\limits_{l=1}^{m} G_l$ *с разложением соответствующей j-й компоненты* $f_j(x)$ *вектор-функции* $f(x)$ *в тригонометрический ряд Фурье, если на любом компакте* $K \subset G$: $\lim\limits_{n\to\infty}\left\| \sigma_n^j(\cdot, f) - S_{|\lambda_n|}(\cdot, f_j)\right\|_{C(K)} = 0$.

В 2.1 и 2.2 сформулированно и доказано необходимое условие покомпонентной равномерной равносходимости на любом компакте $K \subset G$ с тригонометрическим рядом Фурье.

Теорема 7. [7] *Пусть функции* $p(x)$ *и* $q(x)$ *принадлежат классу* $L_1(0,2\pi)$ *и система* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяет при фиксированном* $p \ge 1$ *двум условиям* A_p. *Тогда для того чтобы каждая j-я (j=1,2) компонента разложения произвольной вектор-функции* $f(x)\in L_p^2(0,2\pi)$ *в биортогональный ряд по системе* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *равносходилась равномерно на любом компакте* $K \subset G$ *с разложением в тригонометрический ряд Фурье соответствующей j-й компоненты* $f_j(x)$ *вектор-функции* $f(x)$, *необходимо, чтобы для любого компакта* $K_0 \subset G$ *существовала постоянная* $C(K_0)$, *обеспечивающая справедливость для всех номеров* ***к*** *неравенства*

$$\|u_k\|_{L_p^2(K_0)}\|\upsilon_k\|_{L_q^2(0,2\pi)} \le C(K_0), \tag{23}$$

в котором $q = \dfrac{p}{(p-1)}$ $(q = \infty \quad при \quad p = 1)$.

2.3 посвящен доказательству необходимого и достаточного условия покомпонентной равномерной равносходимости при $P(x)\equiv 0$.

В 2.4 рассматривается разрывный оператор Дирака с потенциалом из класса $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2},\ p>2,$ и устанавливаются необходимые и достаточные условия покомпонентной равносходимости на компакте с тригонометрическим рядом разложений в биортогональный ряд произвольной вектор-функции $f(x)\in L_2^2(0,2\pi)$ по системе корневых вектор-функций данного оператора.

Пусть рассматриваемая система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию B_2:

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $L_2^2(0,2\pi)$

2) система собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет двум неравенствам (18) и (19)

3) система $\{\upsilon_k\}_{k=1}^{\infty}\subset L_2^2(0,2\pi)$, биортогонально сопряженная к системе $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, состоит из корневых вектор-функций формально сопряженного оператора

$$L^* = B\frac{d}{dx}+\overline{P(x)},\quad т.е.\ L^*\upsilon_k=\overline{\lambda_k}\upsilon_k+\theta_k\upsilon_{k+1}.$$

Данный параграф разбит на три подпараграфа. Основным результатом этого параграфа является следующая теорема о покомпонентной равномерной сходимости на компакте.

Теорема 8. [10] *Пусть потенциал $P(x)$ принадлежит классу $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2},\ p>2$, и система корневых вектор-функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию B_2. Тогда для того чтобы выполнялось*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sigma_n^j(\cdot,f)-S_{|\lambda_n|}(\cdot,f_j)\right\|_{C(K)}=0 \qquad (24)$$

для произвольной вектор-функции $f(x)\in L_2^2(0,2\pi)$ на любом компакте $K\subset G$, необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K_0\subset G$ существовала постоянная $C(K_0)$, *обеспечивающая справедливость для всех номеров* k *неравенства*

$$\|u_k\|_{L_2^2(K_0)} \| \upsilon_k \|_{L_2^2(0,2\pi)} \leq C(K_0). \qquad (25)$$

Из данной теоремы следует принцип локализации:

Теорема 9. *Если потенциал* $P(x)$ *оператора* L *и система корневых вектор-функций* $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют тем же требованиям, что и в теореме 8, то при выполнении условия (25) для биортогонального разложения произвольной вектор-функции* $f(x) \in L_2^2(0,2\pi)$ *справедлив покомпонентный принцип локализации в* G*: сходимость или расходимость* $j-$*й компоненты указанного биортогонального разложения в точке* $x_0 \in G$ *зависит от поведения в малой окрестности точки* x_0 *только соответствующей* $j-$*й компоненты* $f_j(x)$ *разлагаемой вектор-функции* $f(x)$ *(и не зависит от поведения другого компонента).*

Отметим, что достаточная часть теоремы 8 ранее доказано для обычного оператора Дирака в работе В.М. Курбанова и А.И. Исмайловой.

Выражаю свою признательность научному руководителю профессору В.М.Курбанову за постановку задачи, постоянное внимание и ценные советы при выполнении работы.

ВЫВОДЫ

Диссертационная работа посвящена изучению вопросов базисности, покомпонентной равномерной равносходимости (ПРРС) и абсолютной и равномерной сходимости (АРС) спектрального разложения (СР) по ССПФ разрывного оператора Дирака. В диссертации получены следующие результаты:

- Установлено необходимое условие риссовости для корневых вектор – функций разрывного оператора Дирака.
- Установлен критерий риссовости систем корневых вектор-
функций разрывного оператора Дирака в $L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p \le 2$.
- Установлен критерий безусловной базисности систем корневых
вектор-функций разрывного оператора Дирака $L_2^2(0,2\pi)$.
- Доказана теорема об эквивалентной базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака в $L_p^2(0,2\pi)$, $1 < p < \infty$.
- Доказана теорема об абсолютной и равномерной сходимости разложений функций из класса $W_{p,2}^{1,m}(0,2\pi)$, $p \ge 1$.
- Доказано необходимое и необходимое и достаточное условия для покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте.
- Доказана теорема о покомпонентной равномерной равносходимости спектрального разложения с обычным тригонометрическим рядом на компакте для оператора Дирака с потенциалом $L_p(0,2\pi)\otimes C^{2\times 2}$, $p > 2$.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Buksayeva, L.Z. Necessary conditions of Riesz property of root vector-functions of Dirac discontinuous operator with summable coefficient // -Baku: Pros. of the IMM of ANAS, -2016. v.42, №1, -pp.106-115.

2. Буксаева, Л.З. Необходимые условия риссовости корневых вектор-функций разрывного Дирака с суммируемым коэффициентом // Əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü il dönümünə həsr olunmuş " Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı respublika elmi konfransın materialları, - Bakı: -2016, -с.115-116

3. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. Риссовости корневых вектор-функций разрывного Дирака с суммируемым коэффициентом // Sumqayıt Dövlət Universitetinin yaradılmasının 55 illiyinə həsr olunmuş "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri Beynəlxalq elmi konfransın materialları", Sumqayıt: - 2017, -s.80-81

4. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. Неравенство Рисса для разрывного оператора Дирака // Azərbaycanın Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 95-ci il dönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın Aktual Problemləri" adlı Respublika elmi konfransının materialları, -Baku: -17-18 may, -2018, -s.158-159

5. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. О неравенстве Рисса и базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака // -Москва: Дифференц. уравнения. -2019. т.55, №8, -с.1079-1089.

6. Буксаева, Л.З. Об эквивалентом базисе систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака // Материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук, - Махачкала: -16-20 сентября, -2019, -с.45-46

7. Курбанов, В.М., Буксаева, Л.З. Покомпонентная равносходимость для разрывного оператора Дирака // -Баку: Известия Педагогического Университета. - 2020. т.68, №3, -с.9-27

8. Буксаева, Л.З. О покомпонентная равномерной равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений, отвечающий разрывным операторам Дирака // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения-XXII, Воронеж: -3-9 мая, - 2021, -с.40-42
9. Буксаева, Л.З. Сходимость спектрального разложения корневых вектор-функцям разрывного оператора Дирака // -Баку: Известия Педагогического Университета, -2021. т.69, №3, -с.9-21
10. Kurbanov, V.M., Buksayeva, L.Z., Ismailova, A.I. Criteria for componentwise uniform equiconvergence with trigonometric series of spectral expansions responding to discontinuous Dirac operator // –Baku: Transactions of ANAS, series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, - 2021.v. 41, issue 4, -pp.114-136.

Защита диссертации состоится **28 июня 2024** года в **14^{00}** часов на заседании диссертационного совета ED 1.04 действующего на базе Института Математики и Механики Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики.

Адрес: AZ 1141, г. Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Математики и Механики.

Электронная версия диссертации и автореферата размещена на официальном сайте Института Математики и Механики.

Автореферат разослан по соответствующим адресам **24 мая 2024** года.

Подписано в печать: 03.05.2024
Формат бумаги: 60x84 1/16
Объём: 39054
Тираж: 70